第十五屆亞太數學(APMO) 競賽試題

比賽時間: 2003 年 3 月 18 日 比賽地點: 中央研究院學術活動中心

注意事項: 本試題的內容僅可由 APMO 官方網站發布。在官方正式發布前, 請勿洩露給任何人, 尤其是經由網路傳遞。

時間限制: 計四小時 (8:30 -12:30)。

計算紙必須連同試卷交回

不得使用計算器

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一:

設 $a, b, c, d.e, f$ 均為實數且多項式

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

可分解為八個一次因子: $x - x_i$, 其中 $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, 8$. 試決定所有可能的 f 值。

問題二:

設 $ABCD$ 是一張邊長為 a 的正方形的紙片。平面上有二平行直線 ℓ_1, ℓ_2 , 其間隔之長也是 a 。將正方形的紙片置於平面上, 使 AB, AD 兩邊分別交 ℓ_1 於 E 和 F 兩點; 同時 CB, CD 兩邊分別交 ℓ_2 於 G 和 H 兩點。設 ΔAEF 和 ΔCGH 的周長分別是 m_1 和 m_2 。試證不論正方形 $ABCD$ 如何擺, $m_1 + m_2$ 是一個常數。

問題三:

設 $k \geq 14$ 是一個整數, 並設 p_k 爲小於 k 的最大的質數。你可以假設 $p_k \geq 3k/4$ 。設 n 爲一個合成數, 試證

(a) 若 $n = 2p_k$, 則 n 不會是 $(n-k)!$ 的因子。

(b) 若 $n > 2p_k$, 則 n 是 $(n-k)!$ 的因子。

問題四:

設 a, b, c 爲某三角形的三邊長, 且 $a+b+c=1$ 。設 $n \geq 2$ 爲一個整數, 試證

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

問題五:

在一組人中, 若不論他們如何組成, 我們總是至少可以做到下面二情形之一:

(1) 可找出 m 個雙人組, 使各雙人組之內彼此皆認識; 或者

(2) 可找出 n 個雙人組, 使雙人組之內彼此皆不認識。

(m, n 都是正整數, 在選雙人組的時候, 每個人最多只能歸屬於一個雙人組) 問這一組人至少要有幾人?

第十五屆亞太數學(APMO) 競賽試題

比賽時間: 2003 年 3 月 18 日 比賽地點: 中央研究院學術活動中心

注意事項: 本試題的內容僅可由 APMO 官方網站發布。在官方正式發布前, 請勿洩露給任何人, 尤其是經由網路傳遞。

時間限制: 計四小時 (8:30 -12:30)。

計算紙必須連同試卷交回

不得使用計算器

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一:

設 $a, b, c, d.e, f$ 均爲實數且多項式

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

可分解爲八個一次因子: $x - x_i$, 其中 $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, 8$. 試決定所有可能的 f 值。

問題二:

設 $ABCD$ 是一張邊長爲 a 的正方形的紙片。平面上有二平行直線 ℓ_1, ℓ_2 , 其間隔之長也是 a 。將正方形的紙片置於平面上, 使 AB, AD 兩邊分別交 ℓ_1 於 E 和 F 兩點; 同時 CB, CD 兩邊分別交 ℓ_2 於 G 和 H 兩點。設 ΔAEF 和 ΔCGH 的周長分別是 m_1 和 m_2 。試證不論正方形 $ABCD$ 如何擺, $m_1 + m_2$ 是一個常數。

問題三:

設 $k \geq 14$ 是一個整數, 並設 p_k 爲小於 k 的最大的質數。你可以假設 $p_k \geq 3k/4$ 。設 n 爲一個合成數, 試證

(a) 若 $n = 2p_k$, 則 n 不會是 $(n-k)!$ 的因子。

(b) 若 $n > 2p_k$, 則 n 是 $(n-k)!$ 的因子。

問題四:

設 a, b, c 爲某三角形的三邊長, 且 $a+b+c=1$ 。設 $n \geq 2$ 爲一個整數, 試證

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

問題五:

在一組人中, 若不論他們如何組成, 我們總是至少可以做到下面二情形之一:

(1) 可找出 m 個雙人組, 使各雙人組之內彼此皆認識; 或者

(2) 可找出 n 個雙人組, 使雙人組之內彼此皆不認識。

(m, n 都是正整數, 在選雙人組的時候, 每個人最多只能歸屬於一個雙人組) 問這一組人至少要有幾人?