

機率統計入門

黃文璋

國立高雄大學
應用數學系，統計學研究所

暑期研習營
中央研究院統計科學研究所

103年7月16-18日



第二講

認識機率

- ◆ 1987年，印度傳奇數學家拉曼紐揚(S. Ramanujan, 1887-1920) 百年誕辰，有一系列的紀念活動。
- ◆ 著名統計學者勞氏(C. R. Rao, 1920-)，也應邀給了三場演講。

◆ 之後，印度統計學研究所(Indian Statistical Institute)基於勞氏的演講稿，於1989年，為他出版了**統計與真理**一書，1997年發行第二版。

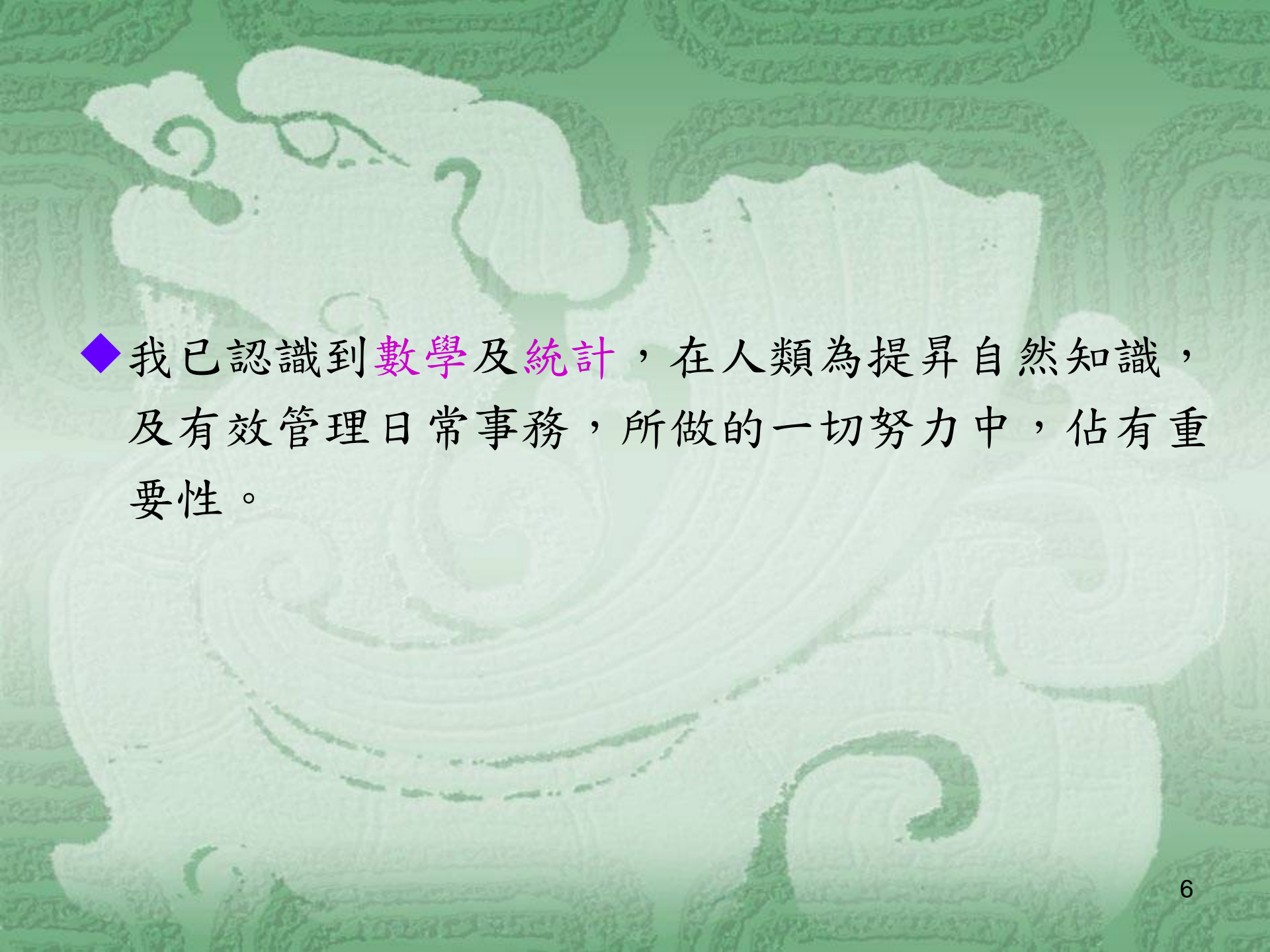
在第一版的序文中，勞氏提到：

- ◆ 學生時代，我主修**數學**——一種從給定前提下演譯結果的邏輯。

(the logic of deducing consequences from giving premises)

- ◆ 後來我唸**統計學**——一種從經驗中學習的合理過程，及從給定的結果驗證前提的邏輯。

(a rational approach to learning from experience and the logic of identifying the premises given the consequences)



◆我已認識到**數學**及**統計**，在人類為提昇自然知識，及有效管理日常事務，所做的一切努力中，佔有重要性。

我相信：

- 在最終的分析中，所有知識皆為歷史。
- 在抽象的意義下，所有科學皆為數學。
- 在理性的世界裡，所有判斷皆為統計。

- ◆近年來，鑒於統計學的重要性，高中數學裡，逐漸加進統計的題材。
- ◆95學年開始的“普通高級中學數學課程綱要”中，新增的**信賴區間**與**信心水準**，卻帶給師生不小困擾。
- ◆此新加入的統計題材，由於需取樣，得到數據，使機率論裡**隨機性**的特質顯現出來。

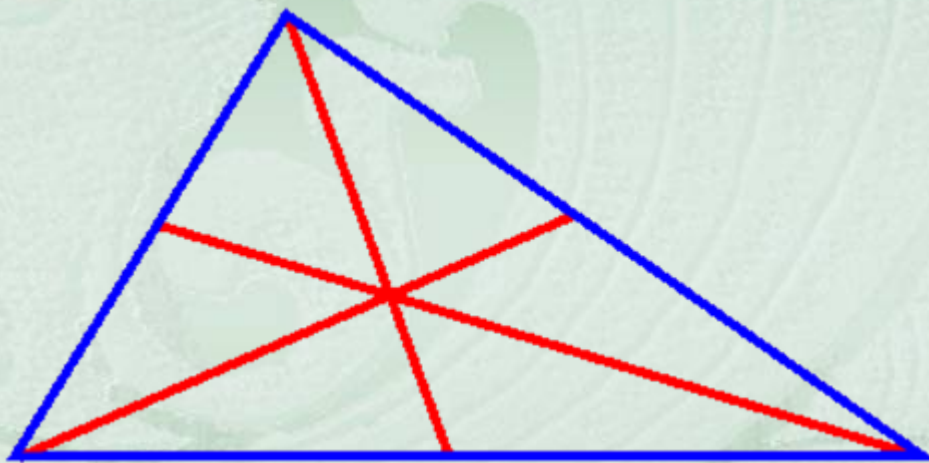
- ◆ 雖有人認為機率與統計，這類數學所需的前置準備不多，因此提前教沒問題。
- ◆ 但隨機性的概念，在理解層次上，其實並不是那麼容易能掌握。
- ◆ 不少人認為，大學裡統計比微積分難教、難學。

◆ 微分、積分皆有物理意義。

◆ 投擲一公正骰子，所得點數之期望值為3.5？

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。

數學中有很多必然性。



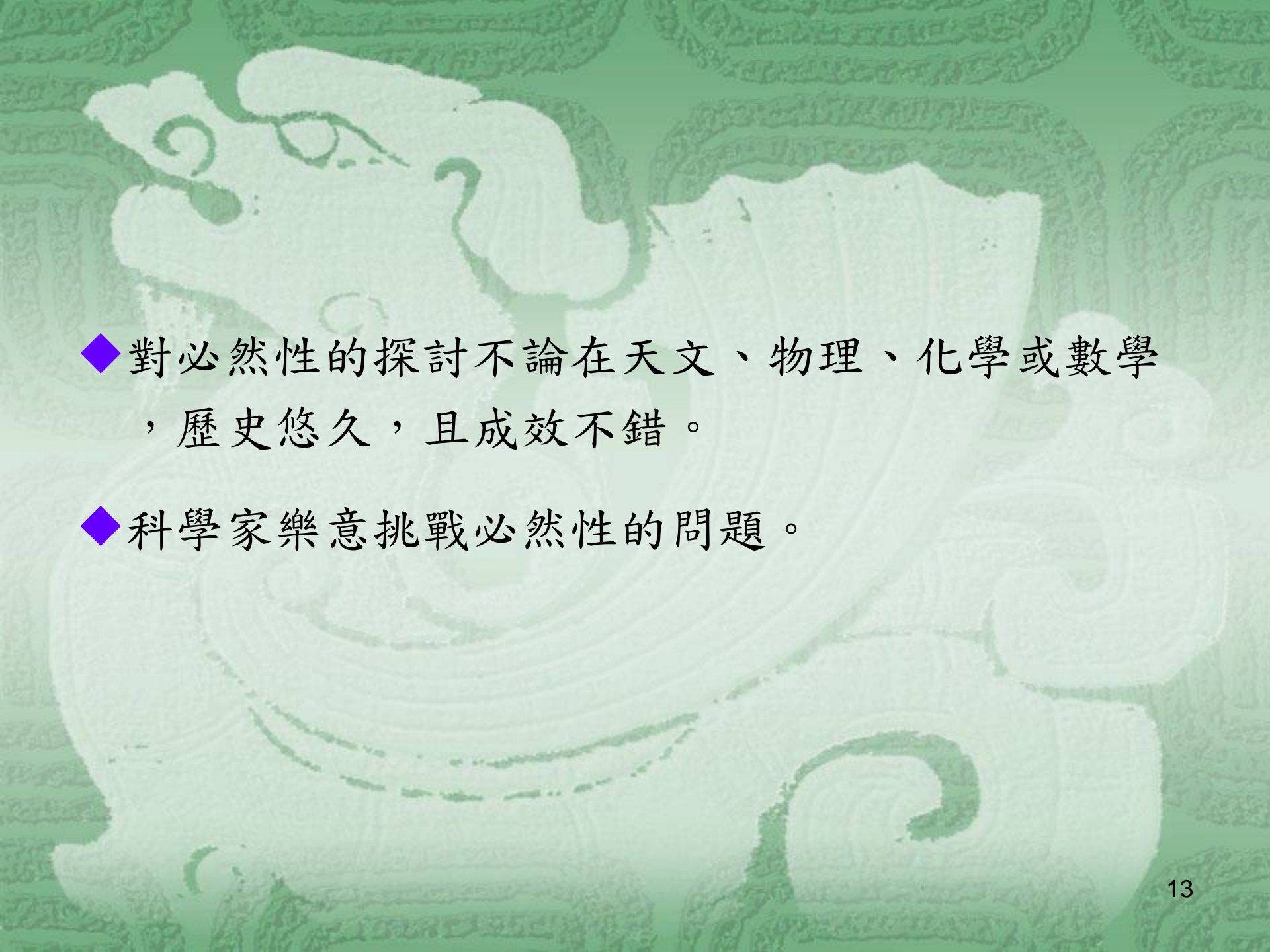
三角形重心、外心、垂心三點共線。

兩千三百年前的幾何原本中有許多這類的結果。



◆ 隨機性：

- 銅板落地那一面朝上？
- 氣象局預測莫拉克颱風降雨集中於北部地區。

- 
- ◆ 對必然性的探討不論在天文、物理、化學或數學，歷史悠久，且成效不錯。
 - ◆ 科學家樂意挑戰必然性的問題。

◆ 對隨機性的了解則很侷限：

➤ 明天會不會下雨？

➤ 颱風走向？

➤ 下次地震是何時？

- ◆信賴區間的概念，是奈曼於1934年的演講中首度提出。
- ◆演講結束後，大會主席包雷(A. L. Bowley, 1869–1957)於致詞中提到：

我不很確定此信心不是一信心戲法
(I am not all sure that the confidence
is not a confidence trick)。

◆ 在95%信賴區間中，

➤ 95%究竟是指什麼？

➤ 是機率嗎？

➤ 如果是，是什麼事件的機率？

◆統計裡有各種方法，但因處理隨機現象，少有倚天既出，誰與爭鋒的方法。

高中數學98課綱

◆附錄3.3“常態分布，信賴區間與信心水準的解讀”中說：

高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現為 p 的銅板 n 次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數學生所得的信賴區間都會涵蓋 p ？

◆何以信賴區間的概念不易理解？

未能正確了解機率的涵義！

◆機率究竟是深不可測，或僅是

庶民數學？

◆若輕忽機率概念的深度，由於其重要，便提早教
機率統計，對國民善用統計，並無幫助。


2. 機率的意義

- ◆ 古典機率，基本假設是相同可能性。適用於擲銅板、骰子、玩撲克牌，...

- ◆ 2009年，高爾夫球好手，老虎伍茲(Tiger Woods, 1975-)，參加別克公開賽。第一輪打完，落後領先者8桿，排名91。
- ◆ 前一場比賽，他首次提前被淘汰。伍茲不行了？

- ◆ 打完3輪後，伍茲躍居首位。
- ◆ 這時大家看法丕變，一致認為這座冠軍盃，幾乎是他的囊中物了。
- ◆ 因過去的紀錄，伍茲如能帶著54洞領先進入決賽圈，戰績35勝1敗。

機率值會變！




他贏了沒有？

阿根廷vs.瑞士 阿根廷出線機率63%

阿根廷想贏球打進八強得靠前鋒梅西，瑞士想要打敗阿根廷闖進八強，必須有效封鎖梅西，明天凌晨零時開踢的16強淘汰賽阿根廷對瑞士，梅西是頭號焦點。數據分析，阿根廷在這場比賽贏球的機率達63%。...

(聯合晚報 103年7月1日 李亦伸)



那一隊贏？

世足／美強歐弱 主場優勢求勝切

風水輪流轉，美強歐弱是本屆世足的特點之一，
…，使得晉級16強的有一半是美洲球隊。不少評論指出，這是歐洲人對南美氣候「水土不服」所致，但德國隊教練勒夫則認為，美洲球隊因主場氣勢，贏球的慾望更強烈。根據**歷史法則**，只要是在美洲舉辦的世界盃，歐洲球隊**奪冠的機率**是零。…

(台灣醒報103年6月29日 陳正健)

The image features a large, white, stylized dragon sculpture as the central focus. The dragon is depicted in a dynamic, coiled pose, with its head turned to the left, showing its eyes and whiskers. The background is a solid green color with a repeating pattern of smaller, lighter green dragon sculptures. The overall style is reminiscent of traditional Chinese art.

那一隊獲冠軍？

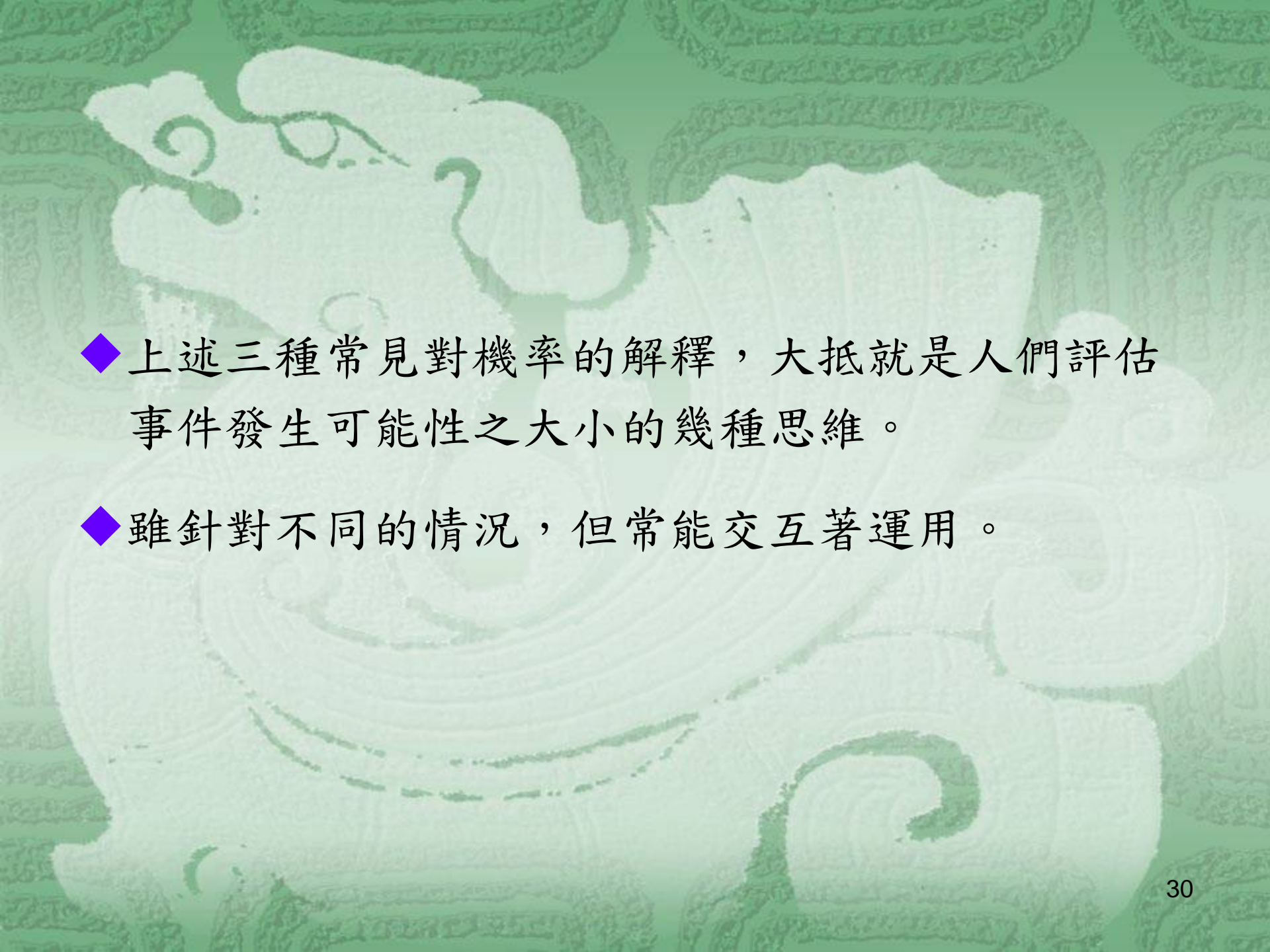
◆ 以相對頻率來解釋機率，

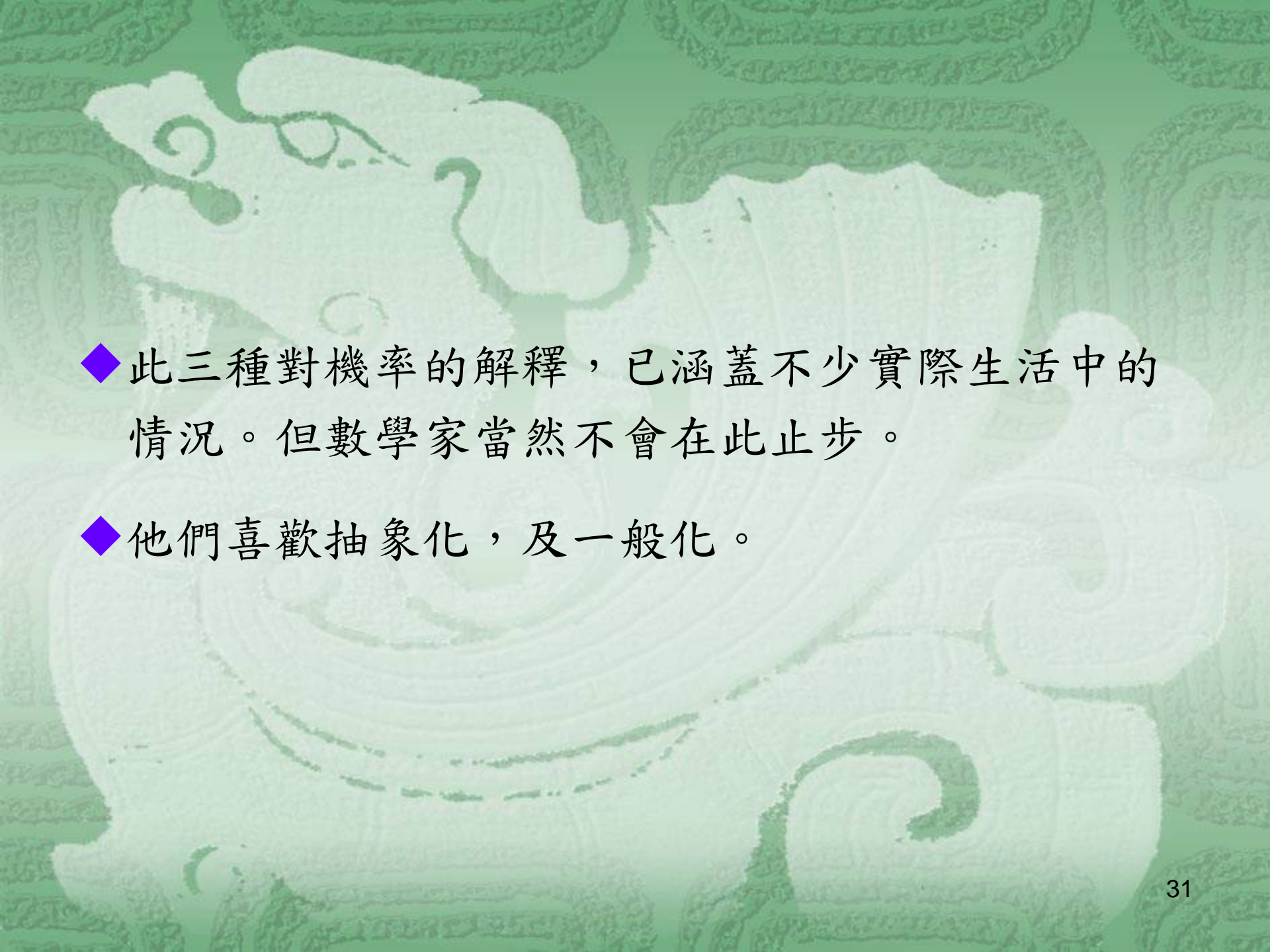
在沒有更多資訊下，常被認為是一客觀的辦法。

◆ 某君看上一女孩，驚為天人，覺得這是他今生的新娘。

◆ 評估後信心滿滿，自認追上的機會有8成：

主觀機率！

- 
- ◆ 上述三種常見對機率的解釋，大抵就是人們評估事件發生可能性之大小的幾種思維。
 - ◆ 雖針對不同的情況，但常能交互著運用。

- 
- ◆ 此三種對機率的解釋，已涵蓋不少實際生活中的情況。但數學家當然不會在此止步。
 - ◆ 他們喜歡抽象化，及一般化。

以公理化的方式引進機率

- ◆ 公理化後，機率論便快速地發展，並成為數學中一重要的領域。
- ◆ 這歸功於俄國的科莫果洛夫 (A. N. Kolmogorov, 1903-1987)，於1933年出版的小書 **機率論的基礎**：

機率論作為數學學科，可以而且應該從公理開始發展，就如同幾何、代數一樣。

- ◆ 從事一隨機實驗，或觀察一隨機現象，其所有可能的結果之集合，稱為一樣本空間(sample space)，通常以 Ω 表之， $\Omega \neq \emptyset$ 。
- ◆ Ω 中的每一元素，便稱為一樣本，通常以 ω 表之。
令 \mathcal{F} 表包含 Ω 之所有子集合之集合，每一 $A \in \mathcal{F}$ 便稱為一事件(event)。
- ◆ 對每一事件 A ，給定一實數 $P(A)$ ，稱為 A 之機率。
 (Ω, \mathcal{F}, P) 就構成一樣率空間。

- ◆ 在較高等的機率論的書裡， \mathcal{F} 往往允許取成只是 Ω 之一些子集合之集合(但滿足若干條件)，而不須包含 Ω 所有子集合。
- ◆ 這樣放寬對 \mathcal{F} 之限制，不但使有些 Ω 之子集合不是事件，也讓一些後續的討論，如隨機變數(random variable)，更富彈性與變化。

◆ 在機率空間裡， P 稱為**機率測度**，簡稱**機率**，它是定義在 \mathcal{F} 上之一實函數，且滿足

(i) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$;

(ii) 若 $A_n, n \geq 1$ ，為互斥事件，則

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

(iii) $P(\Omega) = 1$ 。

◆ 二事件 A, B ，若 $A \cap B = \emptyset$ ，便稱為**互斥**。

◆ **例.** 令 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ 為一可數的集合， f 為一定義在 Ω 之實函數，且滿足

$$f(\omega_i) \geq 0, \forall i \geq 1, \text{ 且 } \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) = 1,$$

\mathcal{F} 為 Ω 之所有子集合之集合，再定義一 \mathcal{F} 上之函數 P 如下：

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega), \quad A \in \mathcal{F},$$

則 P 為一機率測度。 (Ω, \mathcal{F}, P) 即構成一 **離散型** 的機率空間。

◆ f 稱為該隨機變數之 **機率密度函數** (簡稱 p.d.f.)。

◆ **例.** 設 Ω 為實數 R 上之一區間， f 為 Ω 上之一實函數，且滿足

$$f(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \text{ 且 } \int_{\Omega} f(\omega) d\omega = 1。$$

則由下式可定義出一機率測度

$$P([a, b]) = \int_a^b f(\omega) d\omega, \forall a, b \in \Omega, \text{ 且 } a < b。$$

◆ 所謂**隨機變數**，就是一個定義在樣本空間 Ω 之實函數。若以 X 表一隨機變數，則此函數之定義域為 Ω ，對應域為實數集合 R 。

◆ 引進隨機變數，可能只是想將實驗結果數值化，如

$$X(\text{正面}) = 1, X(\text{反面}) = 0,$$

又如 Ω 表某校新生之集合，則對 $\forall \omega \in \Omega$ ，可令

$$X(\omega) = \omega \text{ 之身高。}$$

◆ 隨機變數通常以英文大寫字母表示。

隨機變數就是函數，何以很多人難以理解？

◆ 對一隨機變數 X ，我們定義其分佈函數 F 為

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega | X(\omega) \leq x\}), x \in R。$$

◆ 設有二隨機變數 X, Y ，定義在同一機率空間。對任二實數 x, y ，事件 $\{X \leq x\}$ 與 $\{Y \leq y\}$ 同時發生之機率，以 $P(X \leq x, Y \leq y)$ 表之，其意義為

$$P(\{\omega | X(\omega) \leq x, \text{ 且 } Y(\omega) \leq y\})。$$

以

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), x, y \in R,$$

當作 X, Y 之聯合分佈函數。

◆ 二隨機變數 X 及 Y ，若滿足

$$(2) P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall x, y \in R,$$

便稱為獨立，否則稱為不獨立。

◆ 設有 X, Y 二隨機變數，機率密度函數分別為 g 及 h ，聯合機率密度函數為 f 。則 X 與 Y 獨立，若且唯若

$$(3) f(x, y) = g(x)h(y), x, y \in R。$$

◆ 也可將以上聯合分佈及獨立的概念推廣到 n 個變數的情況。

◆ 例. 設 $\Omega=(0,1]$, \mathcal{F} 為包含 Ω 上所有開區間之最小的 σ -體 , $P((0,a]) = a$, $0 < a < 1$, 則得機率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 。

令 $X(\omega) = \omega$, $Y(\omega)=1-\omega$, $\omega \in \Omega$ 。 對 $0 < x \leq 1$,

$$P(X \leq x) = P(\{\omega \mid \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}) = P((0,x]) = x,$$

$$P(Y \leq x) = P(\{\omega \mid \omega \in \Omega, Y(\omega) \leq x\}) = P([1-x, 1]) = x,$$

故 X, Y 皆有 $\mathcal{U} [0,1]$ 分佈 。 又對 $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$,

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P((0, x] \cap [1-y, 1])$$

$$= \begin{cases} 0 & , x+y < 1, \\ x+y-1, & x+y \geq 1. \end{cases}$$

◆顯然， X 與 Y 不獨立。事實上，因 $X(\omega) + Y(\omega) = 1$,
 $\forall \omega \in \Omega$ ，故 $P(X+Y=1) = 1$ 。又 X, Y 之聯合機率密度函數不存在。

- ◆ 機率空間是最上游的，若給定機率空間，並在其上定義隨機變數，則可得分佈函數。但有時資訊不足，對一隨機變數，不知其從那裡來，需估計其分佈，或已知屬於那一分佈族，要估計其中的參數。二隨機變數間之關係，也可能需估計。
- ◆ 統計裡常在做估計。

3. 何處是機率天地

- ◆ 有法國牛頓之稱的拉普拉斯(P. S., M. de Laplace, 1749-1827)曾說：

這門源自考慮賭博中的機運之科學，必將成為人類知識中最重要的一部分，生活中最重要的問題中的大部分，都將只是機率的問題。

◆ 隨機的經驗源遠流長。

◆ 舊約聖經利未記第十六章：

為那兩隻羊拈鬮，一鬮歸與耶和華，
一鬮歸與阿撒瀉勒。

◆ 民數記(Numbers)第二十六章(The Second Census)，
耶和華曉諭摩西：

還要拈鬮分地。

民數記第一章的英文標題為The Census。

◆ 在新約聖經，耶穌被釘死在十字架上後：

兵丁以拈鬮來分他的裏衣。

◆ 機率是針對隨機現象。

◆ 有些事雖非隨機，如

胎兒性別、考前猜題、拿在背後的水果，…，

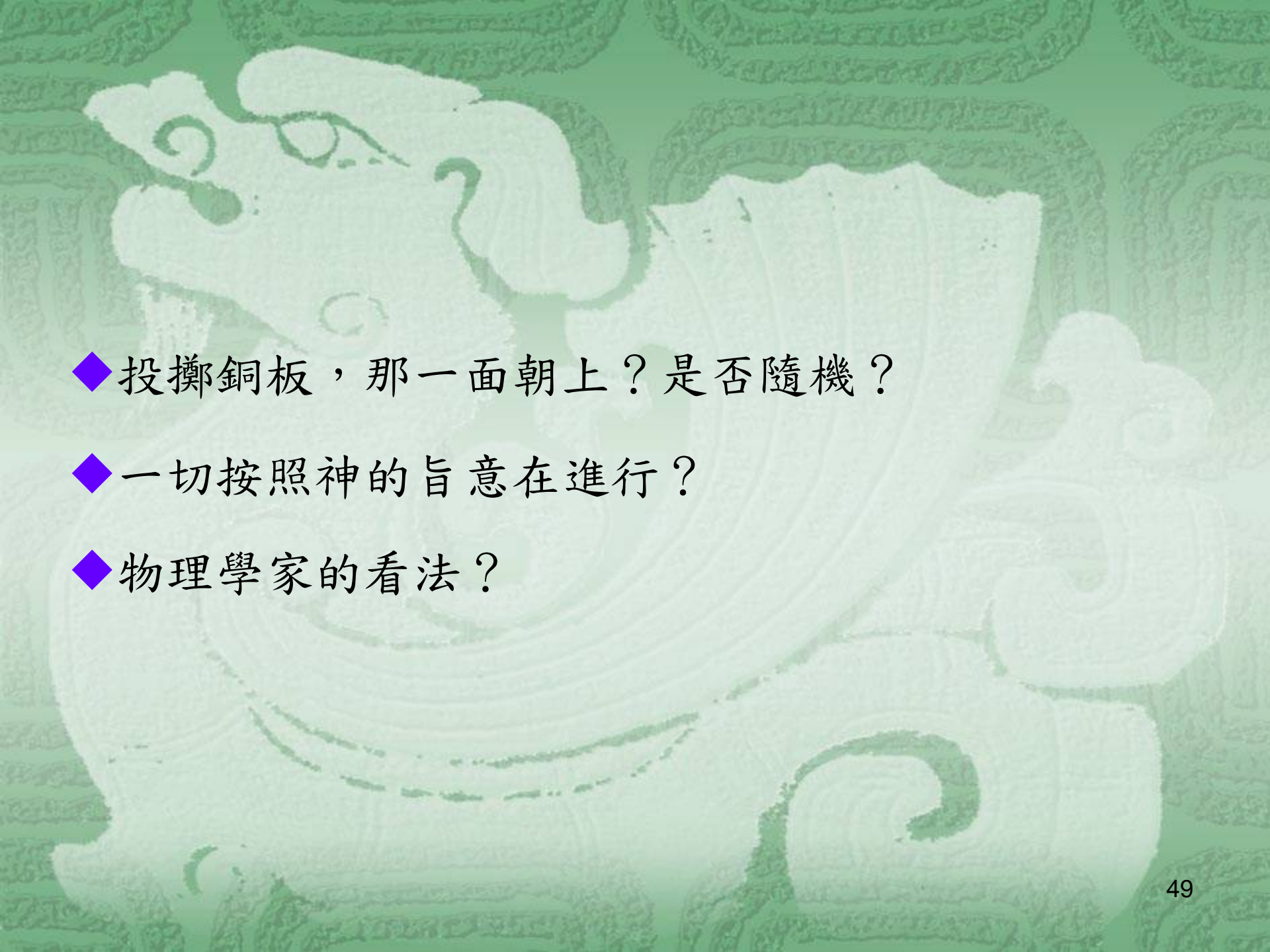
仍可討論機率。

◆ 惠子對莊子說：

子非魚，安知魚之樂？

◆ 但莊子可說：

魚快樂之機率為…。

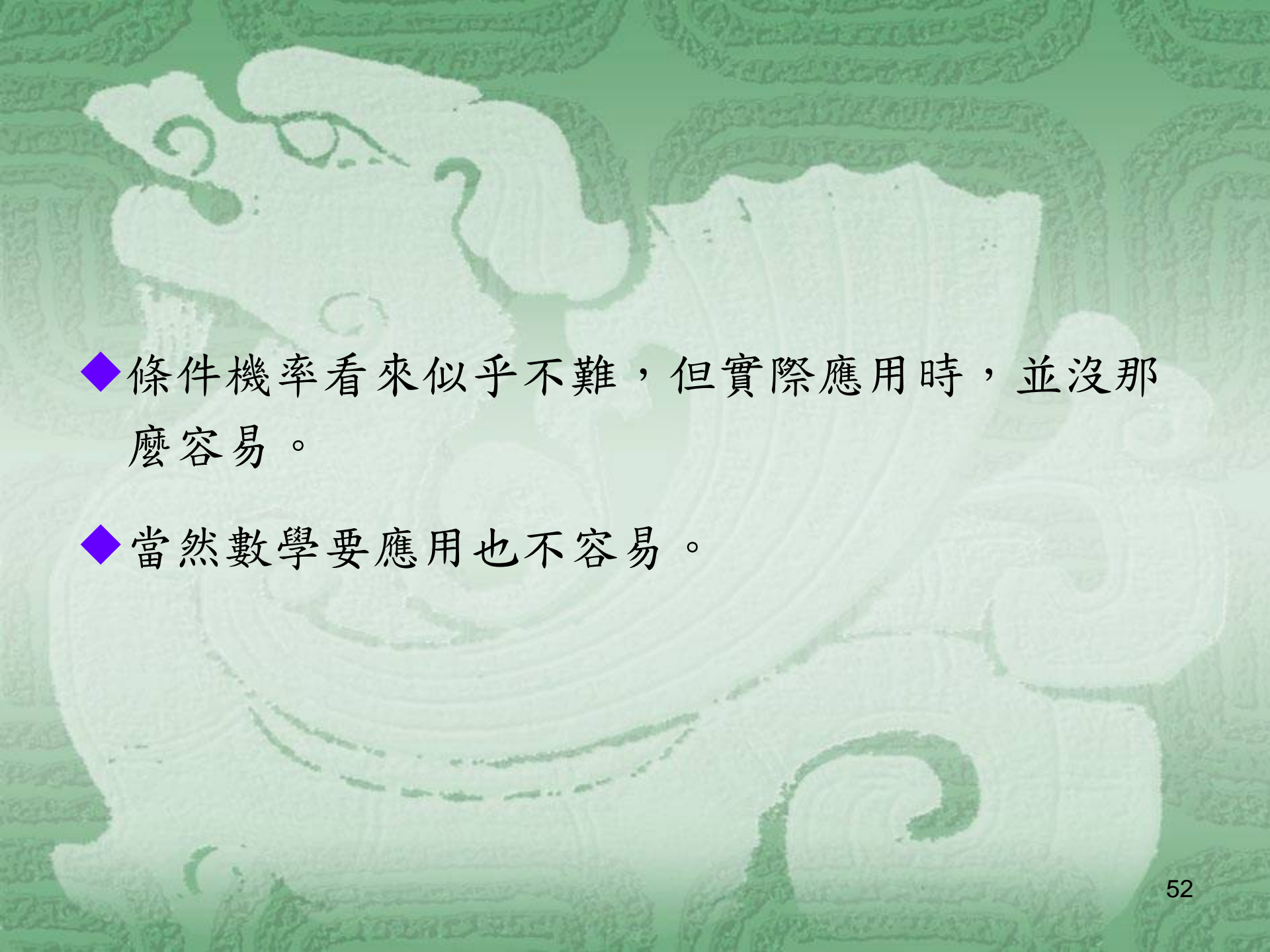
- 
- ◆ 投擲銅板，那一面朝上？是否隨機？
 - ◆ 一切按照神的旨意在進行？
 - ◆ 物理學家的看法？

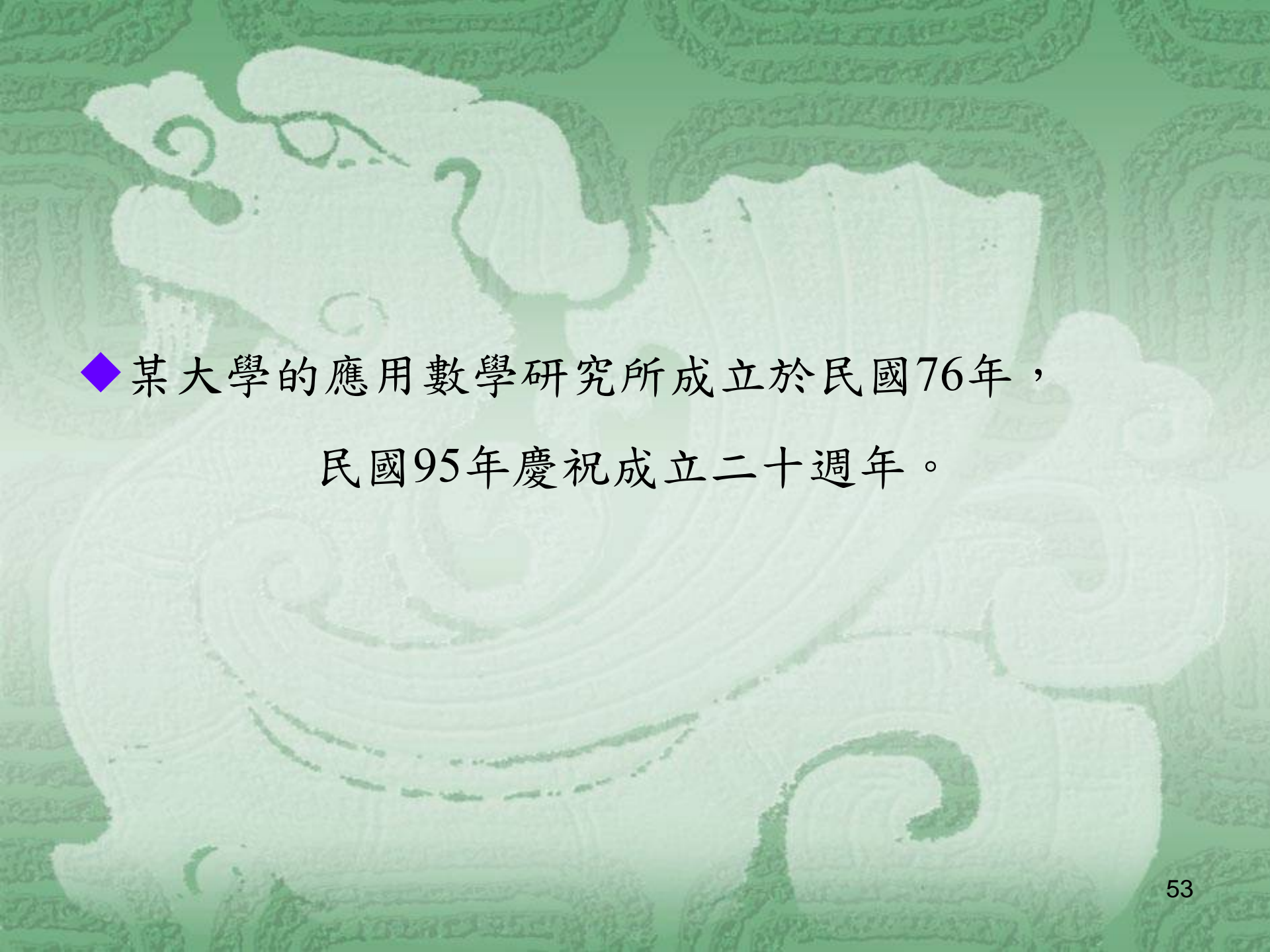
條件機率

◆ 在給定某事件 B 發生(有新的資訊)下，原先那一事件 A 發生的機率，有時會隨之而變。

◆ 何時不變？

A 與 B 獨立！

- 
- ◆ 條件機率看來似乎不難，但實際應用時，並沒那麼容易。
 - ◆ 當然數學要應用也不容易。



◆ 某大學的應用數學研究所成立於民國76年，
民國95年慶祝成立二十週年。

在一篇名為機率與文字陷阱的文章

例1.

(i) 好友有二小孩，已知老大是女孩。

問：老二亦是女孩之機率？

(ii) 好友有二小孩，已知有一個女孩。

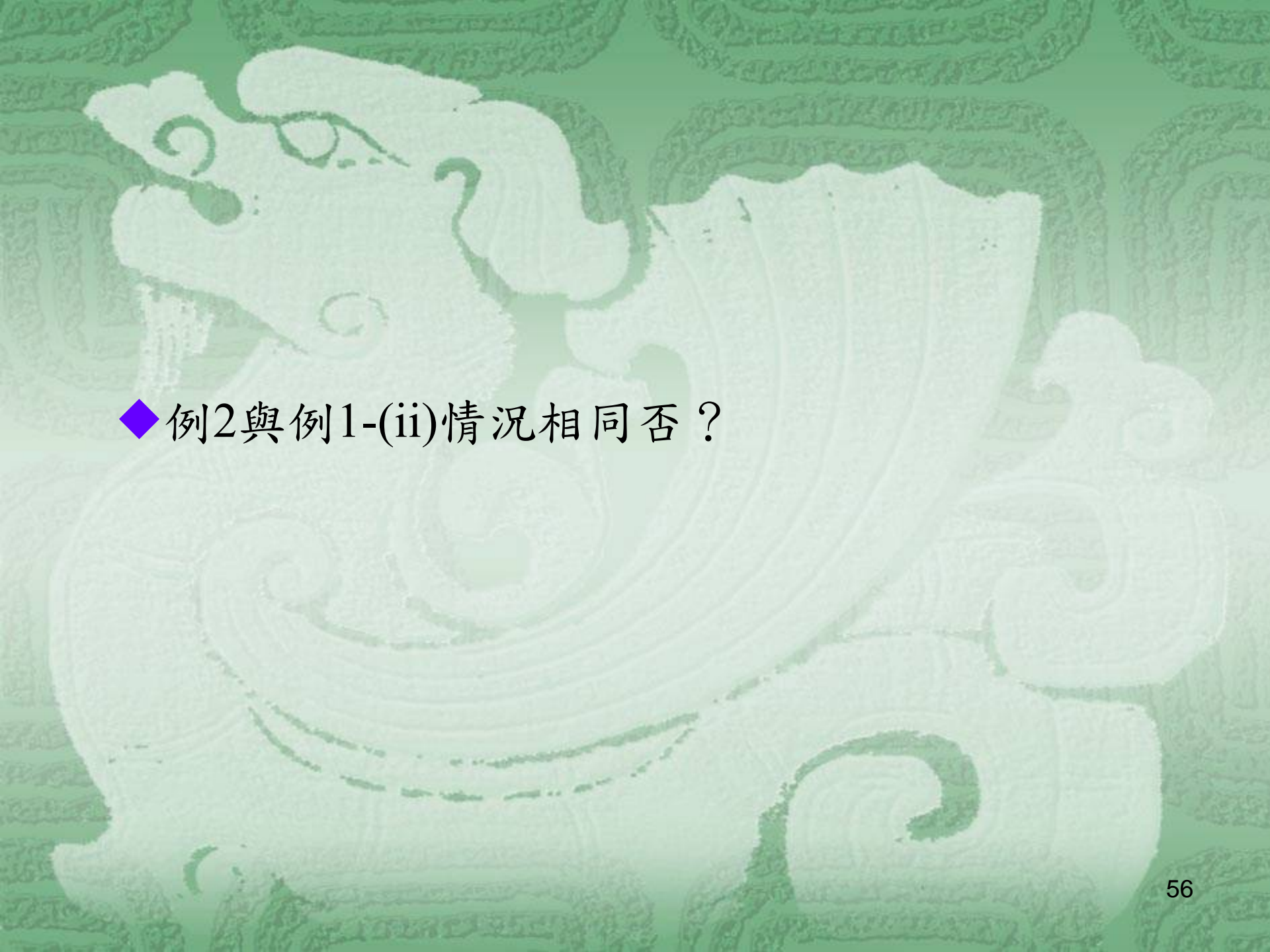
問：另一小孩亦是女孩之機率？

例2. (某高中數學競試)

甲投擲兩硬幣，乙則猜朝上的面相同或相異。乙正準備要猜，丙從旁經過，說：

有一正面。

問：乙該猜相同或相異？



◆ 例2與例1-(ii)情況相同否？

該文指出：

- ◆但再仔細想想，如果丙看到的是反面，那麼乙也要猜相異，而且猜對的機率也是 $2/3$ 。
- ◆所以乙只要知道丙有說話，儘管乙不知丙說什麼，猜相異對的機率就是 $2/3$ 。
- ◆那其實乙根本不需要丙幫忙，只要他猜的時候假想有一個丙走過來跟他說話，那猜相異猜對機率就比較大(因為不管丙說什麼都要猜相異)。
- ◆結論：投擲兩硬幣，朝上兩面相異之機率是 $2/3$ ，因為一定會有正面或反面。

◆ 疑問：明顯有錯，因國中以來就教相同、相異機率皆為 $1/2$ 。

- ◆ 最後，該文宣佈例1中的 (i)與 (ii)，及例2，其中的機率皆為 $1/2$ 。
- ◆ 該文又給一例。

例3.

所有有兩個小孩且有女孩的家庭中，兩小孩皆為女孩的機率為何？

該文之結論

- ◆ 如果題目內有知道的**知**，或是有第三者當仲介給提示或條件，條件機率做出來都會錯。
- ◆ 反之，如果題目有強調**所有的**(如例3)，那麼每一情況發生的機率都相同，就可以放心的用條件機率。
- ◆ 搞了半天，是題目敘述有語病。這是文字陷阱。這題一開始的問法，應該是上題這種問法才對，只是不小心敘述錯誤，造成大問題。我想，大家往後解題，應該會多注意這種情況了。

說文解字

- ◆ 有時給的條件是以一段文字，描述一情境。如何將這段文字的內涵正確解讀，並不見得很容易。
- ◆ 若解讀錯誤，得到的條件機率當然也就不對。

分割

- ◆ 對一樣本空間 Ω ，事件 A_1, A_2, \dots ，若滿足兩兩互斥，即

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \text{ 且 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega,$$

便稱為 Ω 之一 **分割**(partition)。

- ◆ 有限分割 $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 2$ 。

◆ 定理.

設 A_1, A_2, \dots 為樣本空間之一分割。
則對任一事件 B ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B | A_i) P(A_i) \circ$$

◆ 貝氏定理.

設 A_1, A_2, \dots 為樣本空間之一分割。

則對 $i \geq 1$ ，及事件 B ，只要 $P(B) > 0$ ，便有

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}。$$

◆例4.

甲、乙、丙三囚犯，國王宣佈以抽籤決定釋放一位，處決另兩位。

他告訴獄卒那一位將被釋放，但要求獄卒不可先透露。

甲請獄卒透露那一位被釋放遭拒後，改問獄卒：

乙及丙中，那一位會被處決？

獄卒經一番思考，遂(誠實地)告訴甲：

乙會遭處決。

他認為這樣做並未違反國王規定：

乙、丙二人，至少有一會遭處決，這是大家都知道的，因此他並未提供甲任何有關甲會被釋放的有用資訊。

甲聽到獄卒說乙會被處決後很高興。原先他有 $1/3$ 的機率遭釋放，現在因只剩他與丙了，所以機率提高至 $1/2$ 。

◆ 獄卒與甲的分析，何者正確？

◆ 解.

令 A, B, C 分別表甲、乙、丙三人會被釋放的事件。

K 表獄卒說乙會被處決的事件。

樣本空間

$$\Omega = A \cup B \cup C。$$

由假設

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}。$$

想求 $P(A|K)$ 。

$$P(K) = P(K | A)P(A) + P(K | B)P(B) + P(K | C)P(C)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A | K) = \frac{P(\text{獄卒說乙會被處決，且甲被釋放})}{P(K)}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/2}$$

$$= \frac{1}{3}, \text{ 機率沒有變大!}$$

獄卒所提供的資訊是否無用？

- ◆ 若丙偷聽到獄卒與甲的對話，則知他會被釋放的機率提高至 $2/3$ 。
- ◆ 若乙偷聽到獄卒與甲的對話，則知他沒有活命機會。
- ◆ 乙、丙二人中，有一人被釋放之機率為 $2/3$ ，若給定乙被處決，則丙便獨自擁有全部被釋放之機率 $2/3$ 。

◆ 至於甲，被釋放之機率不會改變，還是 $1/3$ 。

◆ 而三人被釋放之條件機率和：

$$P(A|K)+P(B|K)+P(C|K) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1。$$

◆ 此問題有時以其他形式出現，如汽車與山羊問題，稍後會再討論。

◆例5.

衛生局至高雄大學免費檢驗某疾病。假設檢驗結果有正、負兩種反應。

呈正反應，表可能有病，須至醫院進一步檢驗；

呈負反應，則衛生局便認為沒有問題。

衛生局宣稱檢驗之可靠度為90%，且平均每5,000人中，有一人患此病。

你是否願意接受檢驗？

解.

可靠度90%的意義：

若無病，檢驗會呈負反應之機率為0.9；若有病，檢驗會呈正反應之機率亦為0.9。

想知道：

檢驗呈正反應下，有病的機率，及檢驗呈負反應下，無病之機率。

以正表檢驗呈正反應，負表檢驗呈負反應。

◆ 則

$$\begin{aligned} P(\text{有病}|\text{正}) &= \frac{P(\text{正}|\text{有病})P(\text{有病})}{P(\text{正}|\text{有病})P(\text{有病})+P(\text{正}|\text{無病})P(\text{無病})} \\ &= \frac{0.9 \cdot 1/5000}{0.9 \cdot 1/5000 + 0.1 \cdot 4999/5000} \\ &= \frac{9}{5008} \\ &\approx 0.001797。 \end{aligned}$$

◆ 當檢驗呈負反應下，的確無病的機率：

$$P(\text{無病} | \text{負}) = \frac{44991}{44992} \approx 0.999977773。$$

檢驗可靠度	90%	95%	99%	99.90%	99.99%
$P(\text{有病} \text{正})$	0.001797	0.003786	0.019419	0.166556	0.666689

表1. 患病比率1/5000，於不同檢驗可靠度下之 $P(\text{有病} | \text{正})$

患病比率	1/5000	1/500	1/50	1/5	1/2	4/5
$P(\text{有病} \text{正})$	9/5008	9/508	9/58	5/13	9/10	36/37

表2. 檢驗可靠度90%，於不同患病比率下之 $P(\text{有病} | \text{正})$

◆例6.

有一對夫妻剛搬進某社區，大家只知道他們有兩個小孩，並不知性別。

某日社區一管理員，見到此家之媽媽帶著家中一小孩在玩耍。

若該小孩是女孩，求此家兩小孩皆為女孩之機率。

此問題與下述問題等價嗎？



SUSAN BONNER

跪著的小孩是
女孩之機率？

假設生男生
女之機率皆
為 $1/2$ 。

THE SMITH FAMILY

What is the probability that the kneeling child is a girl?

◆ 解.

定義下述事件：

G_1 ：老大是女孩，

G_2 ：老二是女孩，

G ：媽媽帶著的小孩是女孩。

將女孩改為男孩，類似地定義 B_1 及 B_2 。

要求 $P(G_1 \cap G_2 | G)$ 。

$$P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{P(G_1 \cap G_2 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G)},$$

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G | G_1 \cap G_2)P(G_1 \cap G_2) + P(G | G_1 \cap B_2)P(G_1 \cap B_2) \\ &\quad + P(G | B_1 \cap G_2)P(B_1 \cap G_2) + P(G | B_1 \cap B_2)P(B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P(G | G_1 \cap B_2) + \frac{1}{4}P(G | B_1 \cap G_2) \circ \end{aligned}$$

用到

$$P(G | G_1 \cap G_2) = 1, P(G | B_1 \cap B_2) = 0,$$

且

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap G_2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{4}。$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) &= \frac{1/4}{1/4 + P(G | G_1 \cap B_2)/4 + P(G | B_1 \cap G_2)/4} \\ &= \frac{1}{1 + P(G | G_1 \cap B_2) + P(G | B_1 \cap G_2)}。 \end{aligned}$$

此機率與 $P(G|G_1 \cap B_2)$ 及 $P(G|B_1 \cap G_2)$ 有關！

幾個特別的情況

情況(i). 假設不論兩小孩之性別為何，若只帶一小孩出門，媽媽會帶老大出門之機率為一定值 p 。

即設

$$P(G | G_1 \cap B_2) = p, \quad P(G | B_1 \cap G_2) = 1 - p,$$

$$\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{1}{1 + p + (1 - p)} = \frac{1}{2}.$$

\Rightarrow 原問題之答案為 $1/2$ ，與 p 無關。

情況(ii). 假設當兩小孩之性別不同，則媽媽會帶女兒出門之機率為一定值 q 。

即設

$$P(G | G_1 \cap B_2) = P(G | B_1 \cap G_2) = q$$
$$\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{1}{1+q+q} = \frac{1}{1+2q},$$

與 q 有關。

特例

◆ 設 $q=1$ 。即若有兒子及女兒，媽媽一定帶女兒出門 $\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = 1/3$ 。

此即例1-(ii)。

◆ 因

看到該家媽媽帶女兒出門 \Leftrightarrow 該家至少有一女兒。

◆ $q=1/2$ 。即若有兒子及女兒，媽媽會帶女兒或兒子出門之機率各半 $\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = 1/2$ 。

◆ $q=0 \Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = 1$ 。

◆ 除非有其他資訊，否則

看到該家媽媽帶著一個女兒，

不等價於

該家至少有一女兒。

◆ 注意：情況(i)及情況(ii)並非樣本空間之一分割，
兩情況也不互斥。

◆ 結論：由所給條件，無法解出本問題。

◆ 為什麼如此？

◆ 樣本空間 Ω 中共有 8 元素，包含所有型如 (s_1, s_2, i) 的樣本，

s_1 ：老大性別，

s_2 ：老二性別，

i ：見到媽媽帶著的小孩之排序。

◆ 欲知 $P(\omega), \forall \omega \in \Omega$ ，光給 (s_1, s_2) 之機率不夠。

◆ 設生男生女的機率均為 $1/2$ ， Ω 中各元素的機率：

$$P(\{\text{女, 女}, I\}) = \frac{p_1}{4}, \quad P(\{\text{女, 女}, II\}) = \frac{1-p_1}{4},$$

$$P(\{\text{女, 男}, I\}) = \frac{p_2}{4}, \quad P(\{\text{女, 男}, II\}) = \frac{1-p_2}{4},$$

$$P(\{\text{男, 女}, I\}) = \frac{p_3}{4}, \quad P(\{\text{男, 女}, II\}) = \frac{1-p_3}{4},$$

$$P(\{\text{男, 男}, I\}) = \frac{p_4}{4}, \quad P(\{\text{男, 男}, II\}) = \frac{1-p_4}{4},$$

I ， II 分別表媽媽帶著的小孩為老大或老二。

p_1 為給定兩個小孩皆為女孩下， I 發生之機率， p_2 ， p_3 ，及 p_4 依此類推。

因

$$G \cap G_1 \cap B_2 = \{(女, 男, I)\},$$

$$G \cap B_1 \cap G_2 = \{(男, 女, II)\},$$

$$\Rightarrow P(G | G_1 \cap B_2) = \frac{P(\{(女, 男, I)\})}{P(\{(女, 男)\})} = \frac{p_2/4}{1/4} = p_2,$$

$$P(G | B_1 \cap G_2) = \frac{P(\{(男, 女, II)\})}{P(\{(女, 男)\})} = \frac{(1-p_3)/4}{1/4} = 1 - p_3.$$

$$\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{1}{1 + p_2 + 1 - p_3} = \frac{1}{2 + p_2 - p_3}。$$

知道 $p_2 - p_3$ ，才能得 $P(G_1 \cap G_2 | G)$ 。

◆ 當 $p_2 = p_3 = p$
 $\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{1}{2}$ ，
與情況(i)吻合。

◆ 當 $p_2 = q$ ， $p_3 = 1 - q$
 $\Rightarrow P(G_1 \cap G_2 | G) = \frac{1}{1 + 2q}$ 。
與情況(ii)吻合。

◆ 情況(i)及(ii)，均只為本一般情況之特例。

尚可有其他情境

(i) 管理員問那位媽媽你有沒有女兒？

媽媽答有；

(ii) 管理員問那位媽媽你老大是女兒嗎？

媽媽答是；

(iii) 管理員見到那位媽媽帶兩小孩及一條狗在社區公園玩，其中有一女兒站著，另一小孩跪在地下，但被狗遮住，看不出性別。

◆ 分別對三情況，求兩小孩皆為女孩之機率。

回到一開始那三個例子

- ◆ 例1-(i)之答案顯然為 $1/2$ 。
- ◆ 例1-(ii)，若無其他資訊，則假設有一個女孩，等價於家中至少有一女孩，仿例6-(ii)且 $q=1$ ，可得另一小孩亦是女孩之機率，確為 $1/3$ 。

- ◆ 對於例2，若假設當丙看到兩硬幣有1正面及1反面向上，便分別有1/2的機率說有一個正面及有一個反面，此對應例8中的情況(ii)，且 $q = 1/2$ 。此時朝上的兩面相同及相異的機率皆為1/2。即在這種情況下，丙所提供的資訊沒用。
- ◆ 但若 $q \neq 1/2$ ，則丙所提供的資訊就有用。可類似如例6的討論。

◆ 在例3，仍對應例6-(ii)且 $q=1$ ，兩小孩皆為女孩之機率的確為 $1/3$ 。

◆ 注意：例2中，

丙說有正面(假設若有一正面一反面，則有 $1/2$ 之機率丙說有正面)

及

問丙有沒有正面？丙答有。

此二事件不同。

◆ 前者之機率為 $1/2$ ，後者為 $3/4$ 。

4. 解釋機率

- ◆ 投擲一骰子，點數1出現機率為0.1，是什麼意思？
- ◆ 數學系畢業生：

假設投擲 n 次，點數1出現 a 次，則相對頻率 a/n 與0.1之差的絕對值，會大於一給定正數(不管它多小)之機率，將隨著 n 的趨近至無限大，而趨近至0。即 $\forall \varepsilon > 0$,

$$n \rightarrow \infty \text{ 時, } P\left(\left|\frac{a}{n} - 0.1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{。}$$

◆ 大數法則：

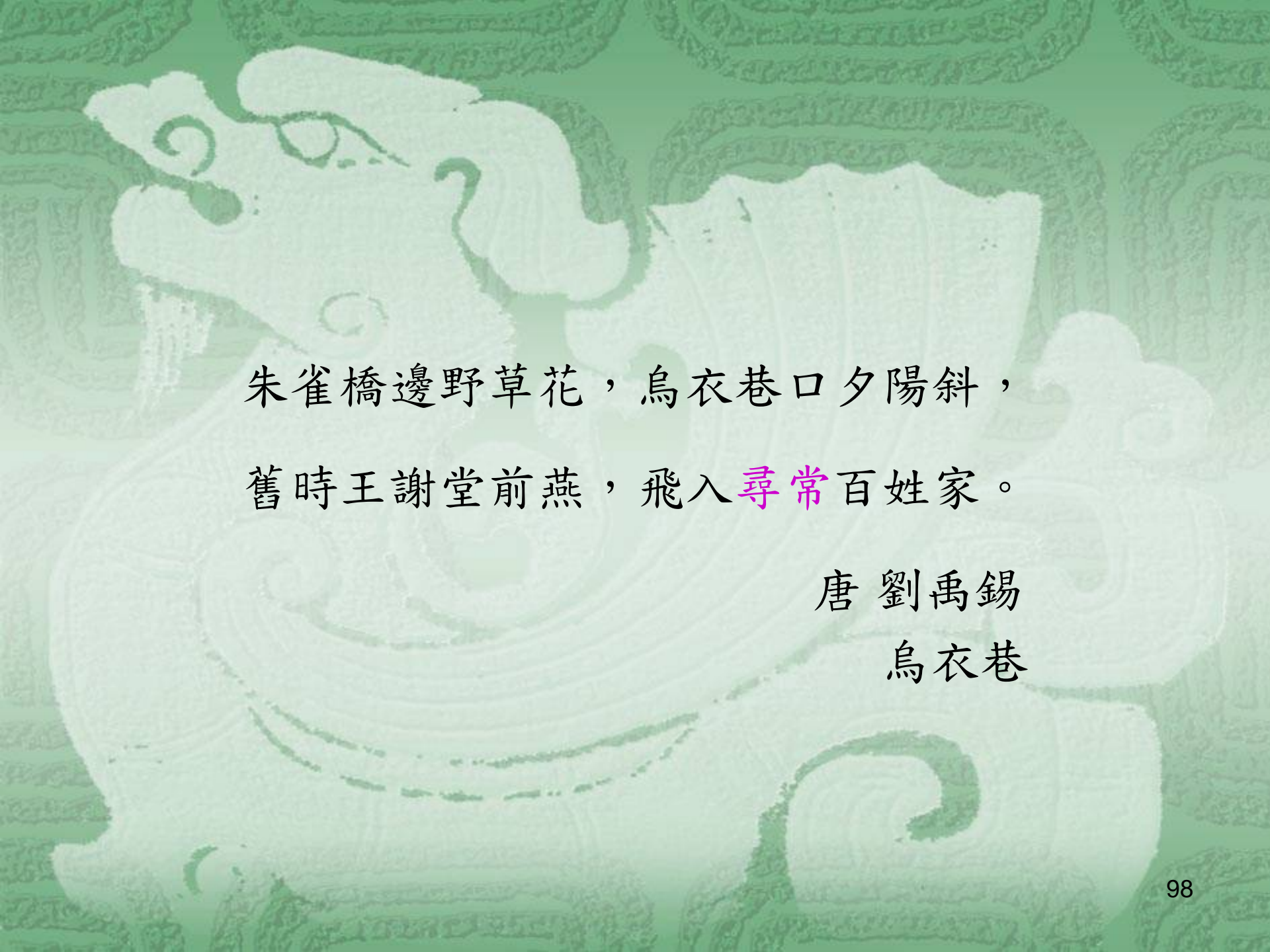
重複觀測，事件出現的相對頻率，會機率收斂至事件發生的機率。

疑惑

- ◆ 無限大是什麼？
- ◆ 什麼是趨近至無限大？
- ◆ 用機率來解釋機率？

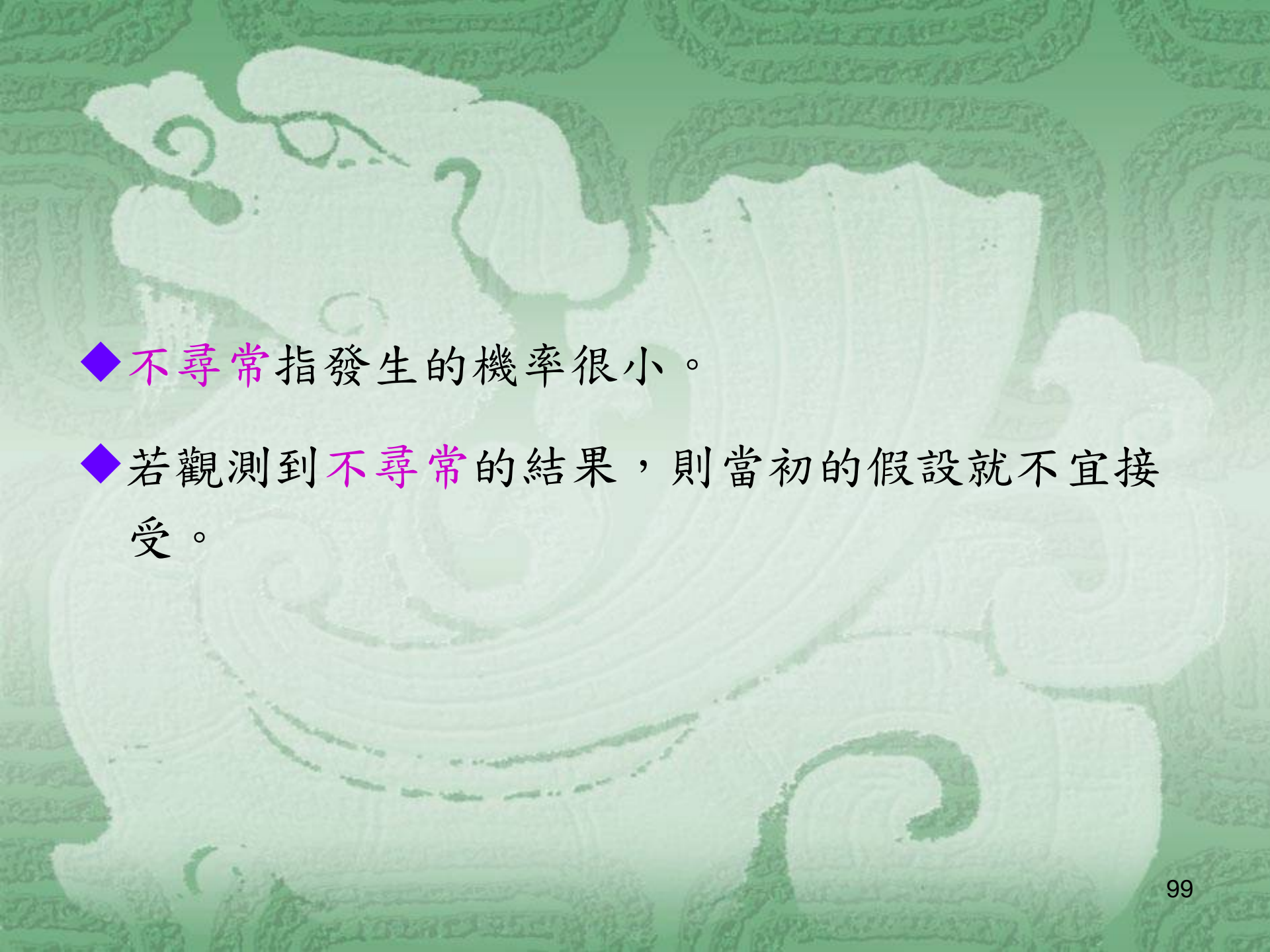
- ◆ 事件出現的相對頻率，當觀測數夠大，**必**接近事件發生的機率？
- ◆ 事件只要機率為正，便都可能發生 \Rightarrow 不論觀測數再大，都不能排除很偏頗的事件發生。

- ◆ 統計學家跳出來，可以做一檢定，**檢定**點數1出現的機率是否真為0.1。
- ◆ 在點數1出現機率為0.1之假設下，觀測到的結果，若屬**不尋常**，便推翻原假設。
- ◆ 什麼是**尋常**？**不尋常**？



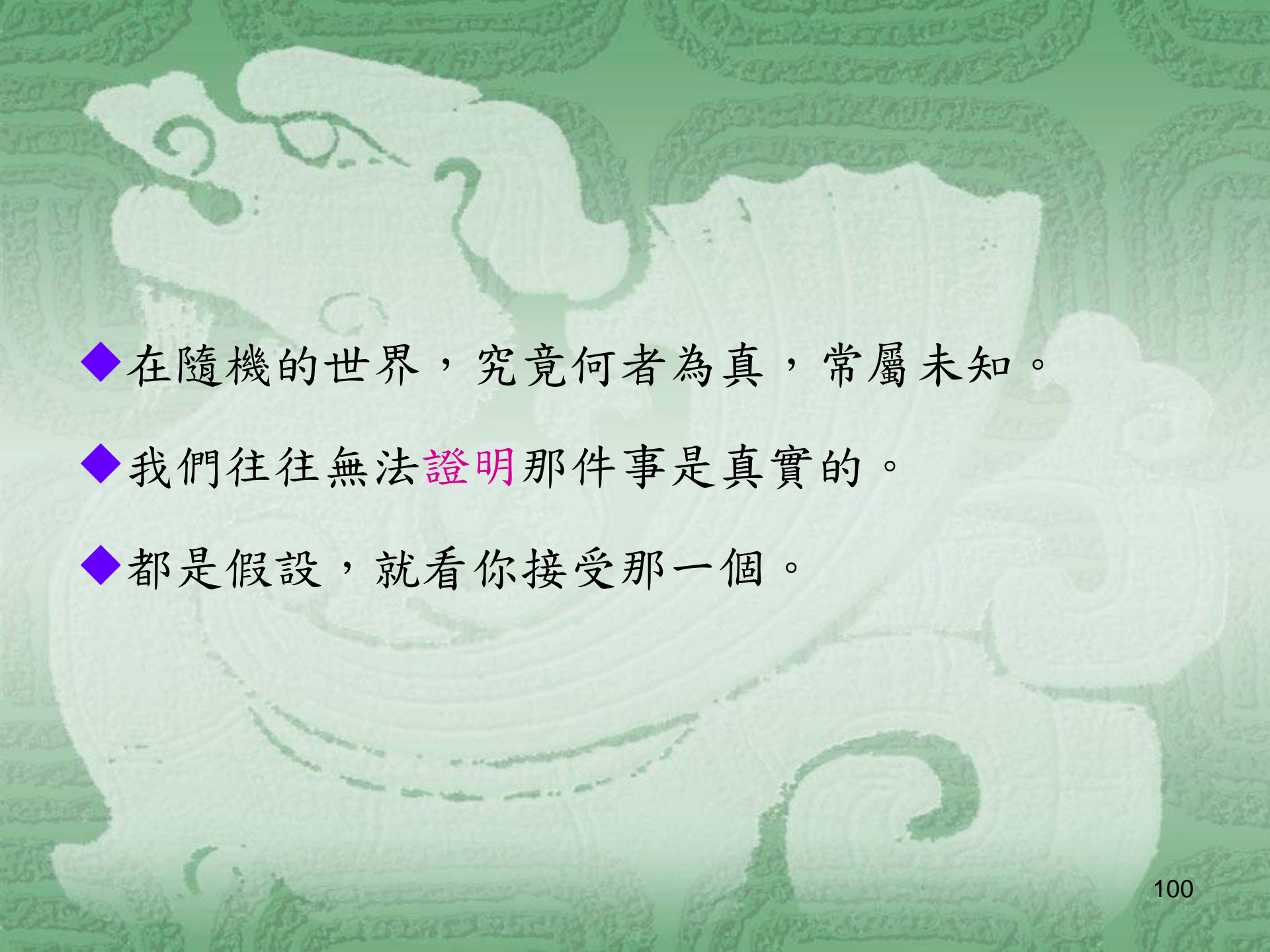
朱雀橋邊野草花，烏衣巷口夕陽斜，
舊時王謝堂前燕，飛入尋常百姓家。


唐 劉禹錫
烏衣巷



◆不尋常指發生的機率很小。

◆若觀測到不尋常的結果，則當初的假設就不宜接受。

- 
- ◆ 在隨機的世界，究竟何者為真，常屬未知。
 - ◆ 我們往往無法證明那件事是真實的。
 - ◆ 都是假設，就看你接受那一個。




◆ 假設一

我願意為你赴湯蹈火。

◆ 假設二

我用我的生命愛你，
不讓尖銳的世界傷害你。
不懂花言巧語的人，
我愛你，
往往來不及證明。



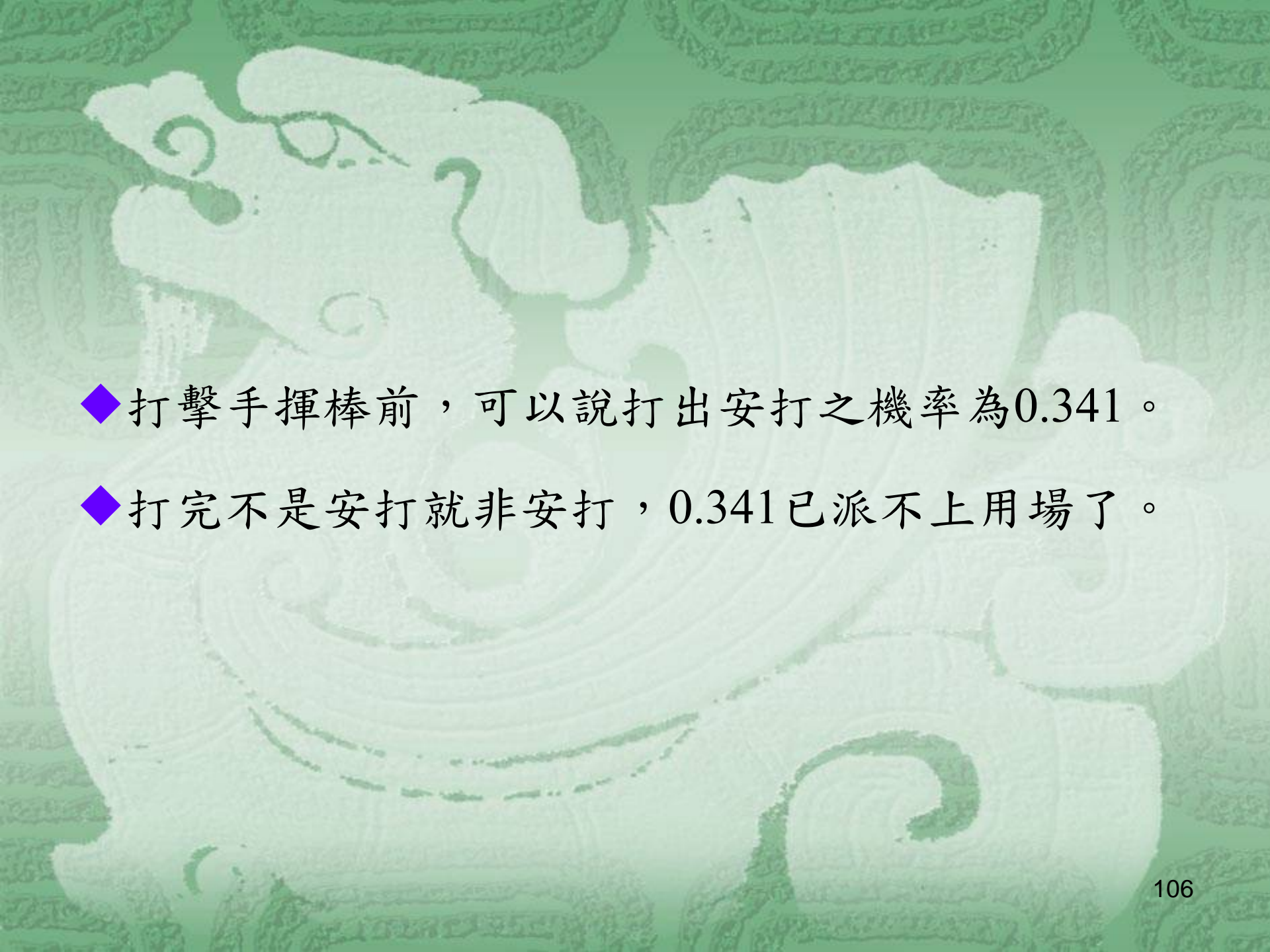
做個假設檢定！

5. 信賴區間

- ◆ 以一區間來估計參數，並給出此區間會涵蓋該參數之機率。
- ◆ 此即區間估計，所得的區間，稱為信賴區間。

- ◆ 估計銅板出現正面之機率 p 。
- ◆ 取樣前，信賴區間為一隨機區間。
- ◆ 取樣後，得到一固定區間。
- ◆ 若知道 p ，則 p 會屬於該區間的機率，將不是1便是0，而不再是 p 了。但

若不知 p 呢？

- 
- ◆ 打擊手揮棒前，可以說打出安打之機率為0.341。
 - ◆ 打完不是安打就非安打，0.341已派不上用場了。

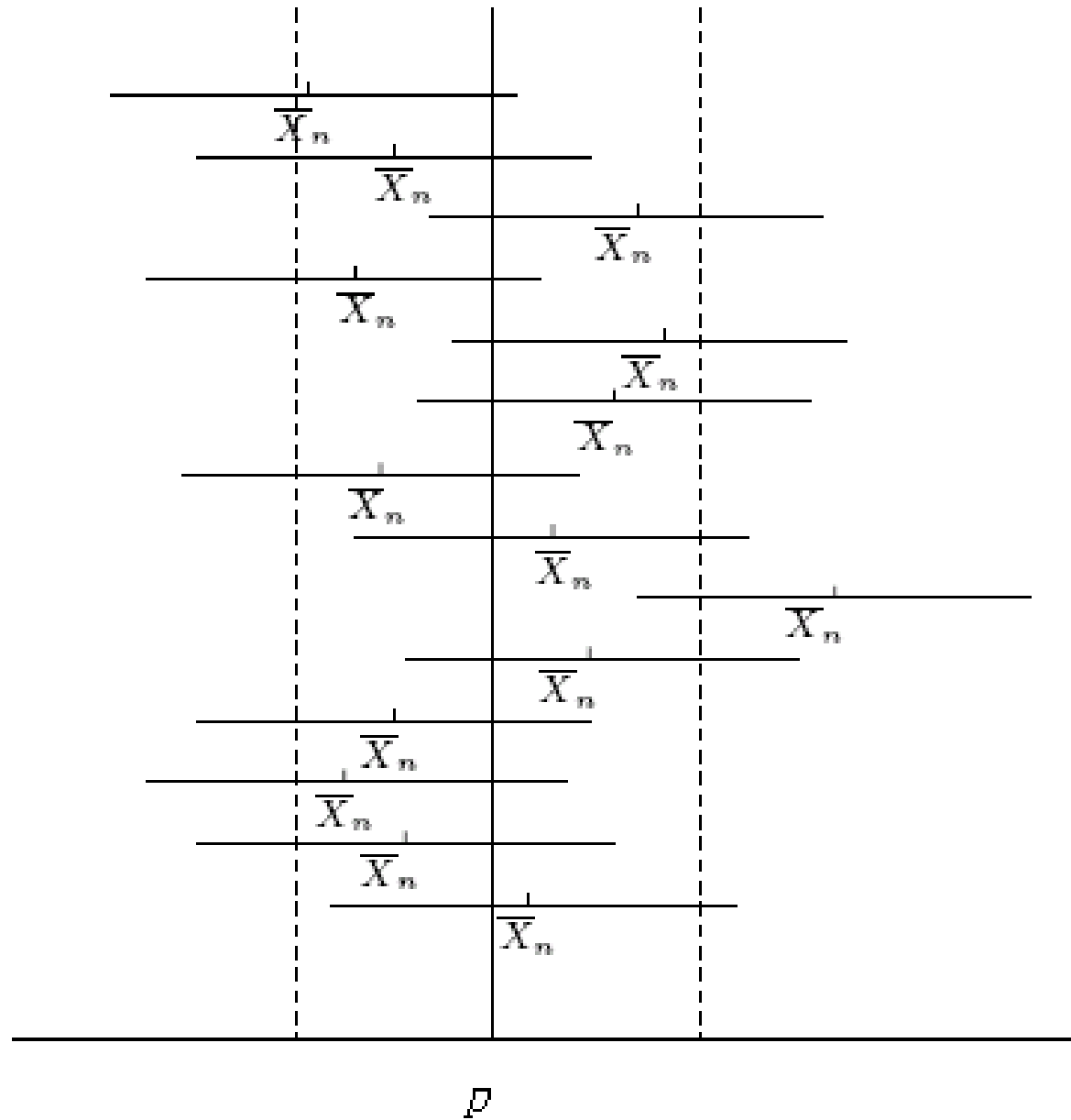
◆張無忌練成九陽真經的神功後，輕易鑽過洞穴，朱九齡卻被岩石卡住：

這小子比我高大，他既能過去，我也必能過去，為什麼我會擠在這裡。當真豈有此理！

◆一旦發生，就不論機率大小，豈有此理又奈何？

- ◆ 課綱中說，可以亂數表模擬出現正面機率為 p 的銅板 n 次，以求得信賴區間。
- ◆ p 乃事先設定，模擬所得之一固定區間， p 有沒有落在其間，一看便知，如何能說該區間涵蓋 p 之機率為0.95？

- ◆ 那95%有何用？
- ◆ 0.95是一機率值，而機率值從來就不是只看一次的實驗結果。
- ◆ 大約可以這麼說，如果反覆實驗，而得到很多信賴區間，其中會包含 p 的信賴區間數，約佔全部區間數的95%。



- ◆ 0.95的意義，乃如同對機率的解釋。
- ◆ 但對同一個 p ，如果全班40人，所得到40個95%信賴區間，其中包含 p 的個數未超過85%也不要太驚訝。
- ◆ 此機率約為0.01388。
- ◆ 雖不太大，但只要班級數夠多，便不難發生。

◆ 課綱說：

大多數學生所得的信賴區間都會涵蓋 p ，
並非精準的講法。

問：

一般而言，樣本數愈大，信賴區間的半徑愈小，因此所得信賴區間似乎便愈不容易包含 p 。對此你有何看法？

6. 情境解讀

- ◆ 機率與我們生活息息相關。若能善用機率，將有助於在隨機世界中，更精準的做決策。
- ◆ 但往往機率應用不易，得到的機率值，常被認為是錯的。
- ◆ 而且還眾說紛紜，各提出不同的機率值。
- ◆ 原因何在？

- ◆ 數學課程中，會遇到所謂應用題。
- ◆ 寫出數學式子後，就是解數學了。
- ◆ 這時便可拋開原先那段冗長的敘述。
- ◆ 但在機率裡，看似簡單的情境，因解讀不同，會導致南轅北轍的結論。



◆ 在決勝21點(21, 2008)中，

有3扇門，其中1扇門後有汽車，另兩扇門後為山羊。你選擇第1扇門後，主持人打開第2扇，見到山羊。問你這時該不該換第3扇門？有位學生答

Yes, because my chance of getting the car will increase from 33.33% to 66.67% by switching from door 1 to door 2.

◆ 正確的講法應該是：

若主持人事先知道汽車在那扇門後，則他會打開1扇門後是山羊的門，假設是第2扇。

這時若換選第3扇門，則得到汽車的機率，由 $1/3$ 增加為 $2/3$ 。

但隱含做一假設。即若第2、3扇門後皆為山羊，則隨機地打開第2或第3扇門。

- ◆ 若主持人事先不知汽車在那1扇門後，只是隨機地自第2及第3扇門中，挑一扇打開，且剛好門後是山羊，則便不用換，因換與不換，得到汽車的機率，皆為 $1/2$ 。

- ◆可以有更一般的假設。當第2或第3扇門後皆是山羊，主持人分別以 q 及 $1 - q$ 的機率，打開第2或第3扇門。則換選第3扇門，得到汽車的機率成為

$$\frac{1}{1+q}。$$

◆ 此機率會受主持人是如何打開第2扇門的影響！

◆ 由於對 $0 \leq q \leq 1$ ，

$$\frac{1}{1+q} > \frac{1}{3} ,$$

所以換，仍是較好的選擇。

◆ 在例6中，如何將

見到此家之媽媽，帶著家中一女孩，

轉化為適當機率空間中的事件？

◆ 究竟如何帶小孩出門？

◆ 該事件並不同於

此家至少有一女孩！

◆ 另一常出現的例子：

平面上有一單位圓，隨機地畫一條弦，求弦長大於此圓內接等邊三角形之邊長機率。


◆ 如何隨機畫弦？

◆ 由1至 n 的 n 個正整數中，隨機地取一數？

◆ 自區間 $[0,1]$ 中隨機地取一數？

- ◆ 在處理機率問題時，情境要定義清楚。
- ◆ 即機率空間要明確給出，否則將導致各說各話。
- ◆ 有時情境較簡單，如
投擲一公正骰子，求點數大於4之機率。

- ◆ 當對情境有疑義時，就要如莊子在秋水篇講的，
請循其本，
把機率空間調出來。
- ◆ 有如政治或社會上，遇到有重大爭議時，就要祭出憲法，並由大法官解釋。
- ◆ 機率中一些獨特的概念，如條件機率，獨立性，及隨機取樣等，也是應用機率時，得謹慎留意的。



謝謝各位！