數論專題探討–從特殊數列談起

高雄師範大學數學系　左太政

一、解題能力之培養

能分解複雜的問題爲一系列的子題。

能選擇使用合適的數學表徵。

能熟悉解題的各種歷程: 蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。

能運用解題的各種方法: 分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。

了解一數學問題可有不同的解法, 並能嘗試不同的解法。

能發展應用問題的解題策略。

能將問題與解題一般化。

二、數學解題策略

數學解題的過程可依下列四個步驟:

1. 瞭解問題-審查題意, 發掘概念內涵; 若題意不了解, 不妨再閱讀二至三次, 直至了解題意。
2. 擬定計畫-分析問題及產生聯想, 尋求解題途徑
   (1). 儘可能畫出圖形或表格
   (2). 檢查特例如令問題中整數取 $1, 2, 3, 4, 5$ 等代入, 看看是否可歸納出規律來。
   (3). 嘗試簡化問題如利用對稱性、採用『不妨假設』而不失問題的一般討論方式。
   (4). 保留任何解題的紀錄, 以便先做別題後再回頭解本題時參考使用。
3. 實行計畫-選擇策略及綜合運用知識去進行推理計算解決問題
4. 回顧解答-驗證答案是否合理及思考結果或方法能否用於解其他問題, 甚至於自己修改原問題或推廣其結論, 形成另一個問題, 亦可考慮作爲專題研究之題目。例如將兩個題目合併成一個問題。

簡言之,通常解題活動先從題目待答或待證明的地方著手 (Request), 適時引進題目的以之條件及潛在的性質 (Response), 最後導出結果 (Result); 這就是「3 R 策略」。

三、數論簡介

「數論」是理論數學最古老的分支之一, 亦是領域範圍最廣之一,主要是研究整數的性質和方程的整數解, 甚至於有理數。

1. 基礎數論主要探討整數的整除性, 含除法原則、歐幾里德原則、因數與倍數、質數的基本性質 (質因數分解及質數有無限多個)、同餘、費瑪小定理 (Fermat's little theorem)、尤拉定理 (Euler's geralization theorem) 等。基礎數論也研究其它主題如線性同餘方程組解的問題 (中國餘數定理)、費波納希數列的性質、畢氏數組等。
2. 其它數論的研究與其他數學領域結合, 如 Diophantine 方程 , 方程 $x^a - y^b = 1$ 之整數解問題, 及四個完全平方數定理 (任意正整數 n 必可表爲四個整數的平方之和) 等, 其餘如代數數論、組合數論等。

四、基本性質

定理 1. 設 n 爲正整數, p 爲質數, 若 $\alpha = \alpha(p,n)$ 滿足條件 $p^\alpha \mid n!, p^{\alpha+1} \nmid n!$, 則

$$\alpha = \alpha(p,n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

推論 2. 設 n 爲正整數, 則

$$n! = \prod_{p \le n} p^{\alpha(p,n)}.$$

應用 3. 設正整數 $a_k (1 \le k \le m)$ 滿足 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, 試證: $\dfrac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_m!}$ 是整數。

應用 4. 設 n 爲正整數, 試證: 任意 m 個連續正整數的乘積必能被 $n!$ 所整除。因此我們可得 $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 爲整數。

五、費瑪小定理與尤拉定理

定理 1 設 **a** 爲大於 1 的正整數, 若 a^n+1 是質數, 則 **a** 爲偶數且 **n** 是 2 的冪次方。

定理 2 設 a 爲大於 1 的正整數, 若 a^n-1 是質數, 則 $a=2$ 且 n爲質數。

由上述定理可得下列兩特殊的數: 費馬數 (Fermat number): $2^{2^n}+1$ 梅森尼數(Mersenne number): 2^p-1, 其中 **p** 是質數。

費瑪小定理 3 若 p 爲質數且 a 爲任意整數, 則 $a^p \equiv a \pmod{p}$. 特別的是, 當 $p \nmid a$, 則 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

尤拉定理 4 設 a, n 爲互質的正整數數, 則 $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Wilson 定理 5 設 p 爲質數, 則 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

六、範例練習

主題 (一)、已知最大的質數

於 2003 年 11 月 17 日公佈已找到目前已知最大的質數 $2^{20996011}-1$, 這個數共有 6320430 位數, 是第 40 個 Mersenne Prime.

問題 1: 如何證明此數的指數 20996011 是質數?

定理 1: 設 **a** 爲大於 1 的正整數, 若 $\mathbf{a^n+1}$ 是質數, 則 **a** 爲偶數且 **n** 是 2 的冪次方。

定理 2: 設 a 爲大於 1 的正整數, 若 a^n-1 是質數, 則 $a=2$ 且 n爲質數。

由上述定理可得下列兩特殊的數:

(1) 費馬數 (Fermat number): $2^{2^n}+1$

(2) 梅森尼數 (Mersenne number): 2^p-1, 其中 **p** 是質數。

習題:

1. **(1).** 若 n 不是質數, 則 2^n-1 亦不是質數。

   (2). 若 n 爲奇質數, 則 2^n-2 必爲 $2n$ 的倍數。

2. 設 $n>1$ 爲整數, 試證 n 不能整除 2^n-1.

3. 試求所有質數 n 使得 2^n+1 被 n^2 所整除。

4. 若奇數 n 不能被 5 所整除, 試證 n 必能整除一數形如 $99\cdots 9$.

5. 設 p 爲奇質數, 試證 任意 $2p-1$ 個整數中必可找到 p 個整數, 使得這 p 個整數之和必爲 p 的倍數。

6. 試求滿足方程式 $x^y+y^z=z^x$, 其中 $x\leq y\leq z$ 的 所有正整數解 x,y,z.

7. 設 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 爲一數列, 若

$$a_0=4004, \quad a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}, \quad n=0,1,2,...,2003.$$

試證: $[a_n]=4004-n,\ \ n=0,1,2,...,2003$, 式中 $[x]$ 爲小於或等於 x 的最大正整數。

8. 試證: 對任意正整數 n, 則 $n(n+1)$ 不能表爲 m^k 的形式, 其中 $m>0,k>1$ 皆爲正整數。

9. 試證: 對任意正整數 a,b,p, 則 必存在二個互質的整數 m,n, 使得 $am+bn$ 爲 p 的倍數。

10. 試求所有正奇數 n 使得 $(n-1)!$ 不能被 n^2 所整除。

11. 試求一正整數的最大完全平方數使得這個平方數不是 10 的倍數, 且當我們去掉這個數的末二位數時, 所餘下的數仍爲完全平方數。

12. 設 a,b 爲二互質的正整數, 試證: $a+b$ 與 a^2+b^2 的最大公因數爲 1 或 2.

13. 設 a,b 爲二正整數, 若 $ab+1$ 能整除 a^2+b^2, 試證: $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 必爲某整數的完全平方。

14. 已知 p 爲質數, 試證: 必存在一質數 q, 使得對任意正整數 n, n^p-p 不能被 q 整除。(第 44 屆 IMO)

主題 (二)、特殊數列

問題: 試找出所有可能實數數列 $\{a_n\}$, 滿足條件

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

1. Fibonacci 數列的第 n 項: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. 試證: F_n 為正整數, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Lucas 數列的第 n 項: $L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $n = 1, 2, \cdots$. 試證: L_n 為正整數, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. 已知一數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0 = 1, a_1 = 2$ 且 $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{a_{n-2}}$, $n = 2, 3, 4, ...$ 試證: 對任一正整數 n, a_n 必為整數。

4. 設 a 正整數, 且 $A = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 試求 A 的整數部分。

附錄一、國內外教學資源及競賽題庫網站

第一部分: 中學資源網站

1."www.utm.edu/research/primes"
2."www.utm.edu/research/primes/largest.html"

第二部分: 競賽題庫資源網站

1."math.rice.edu/ lanius/Geom/quiza.html" (SAT-type test)
2."www.unl.edu/amc/problems.html" (AMC Problems, Problems, Problems)
3."problems.math.umr.edu/index.html" (Index and Journal problems)
4."www.mathpropress.com/mathCenter.html" (Internet center for mathematics problems)
5."forum.swarthmore.edu/mathsites/problems.html" (Internet center for mathematics problems)
6."www.ualberta.ca/ ahsmc/links.html" (AHSMC Links for math contests)
7."olympiads.win.tue.nl/imo/" (International Mathematics Olympiad-IMO)