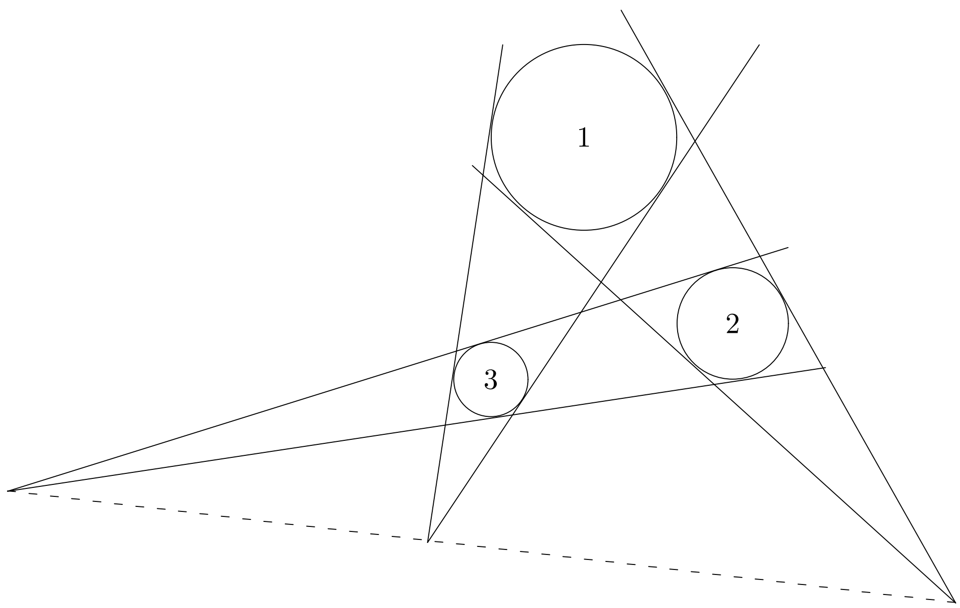
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

June 28, 2004



目 錄

1 李善蘭恆等式 **3**

2 佩爾方程式 **6**

3 一元三次方程式的判別式 **9**

3.1 回顧一元二次方程式 9

3.2 一元三次方程式 9

4 再談佩爾方程式 **15**

5 分數問題 **19**

5.1 一則分數問題 19

5.2 質數的倒數和發散 21

1 李善蘭恆等式

我們都知道組合學上的符號

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

代表從 n 個相異的東西中選取 j 個的方法數。有了這個符號之後，很容易的可以將多項式 $(y+1)^n$ 展開成如下的式子

$$(y+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j.$$

因為這樣的關係，我們經常從組合的方法數或者從多項式展開式的係數這兩種觀點來考慮組合學上的恆等式。這節的目的就是要證明中國數學家李善蘭在組合學上的一則恆等式。首先我們先證明一個引理。

引理 **1.1** (旺德蒙德恆等式) 設 n, m 為正整數且 $n \geq m \geq 1$。證明：

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{m}.$$

【組合證明】等式右邊代表 $n+m$ 個相異的東西選取 m 個的方法數。等式左邊這個和式的第 j 項 $\binom{n}{j}\binom{m}{j} = \binom{n}{j}\binom{m}{m-j}$ 代表從前面 n 個東西中選取 j 個，並從後面 m 個東西中選取 $m-j$ 個的方法數（總共也是選取 m 個）。從這組合的解釋剛好證明兩個式子必須相等。

【多項式證明】考慮式子

$$f(y) = (y+1)^m (y^{-1}+1)^n$$

展開式中常數項的係數。首先，因為 $(y+1)^m$ 展開式中 y^j 項的係數為 $\binom{m}{j}$；而 $(y^{-1}+1)^n$ 展開式中 y^{-j} 項的係數為 $\binom{n}{j}$，所以 $f(y)$ 的常數項係數為

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{j}.$$

另一方面，將多項式 $f(y)$ 化簡為

$$f(y) = (y+1)^m (y^{-1}+1)^n = y^m (y^{-1}+1)^{n+m}.$$

多項式 $f(y)$ 的常數項係數為

$$\binom{n+m}{m}.$$

因此我們得到

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{m}.$$

⊠

定理 **1.1** (李善蘭恆等式) 設 n,m 為正整數且 $n\geq m\geq 1$。證明：

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^2\binom{n+2m-j}{2m}=\binom{n+m}{m}^2.$$

【多項式證明】考慮式子

$$f(x,y)=(x+1)^{n+m}(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m$$

展開式中 x^{2m} 項的係數。

首先，因為 $(x+1)^{n+m}(x+1+y)^m$ 的展開式中 $x^{2m}y^j$ 項的係數為

$$\binom{m}{j}\binom{n+2m-j}{2m},$$

而 $(y^{-1}+1)^m$ 的展開式中 y^{-j} 項的係數為 $\binom{m}{j}$；所以 $f(x,y)$ 展開式中 x^{2m} 項的係數為

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n+2m-j}{2m}\binom{m}{j}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^2\binom{n+2m-j}{2m}.$$

另一方面，因為

$$\begin{aligned}(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j(1+y)^{m-j}(y^{-1}+1)^m\\ &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^jy^{m-j}(y^{-1}+1)^{2m-j},\end{aligned}$$

所以 $(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m$ 展開式中 x^j 項的係數為 $\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m-j}$。又 $(x+1)^{n+m}$ 展開式中 x^{2m-j} 項的係數為 $\binom{n+m}{2m-j}$，所以 $f(x,y)$ 的展開式中 x^{2m} 項的係數為

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m-j}\binom{n+m}{2m-j} &= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m-j}\binom{m}{j}\\ &= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m-j}\binom{m}{m-j}\\ &= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j}\\ &= \binom{n+m}{m}^2 \quad \text{（由旺德蒙德恆等式得到）}.\end{aligned}$$

由 $f(x,y)$ 的展開式中 x^{2m} 項的係數的兩種不同算法證得本定理。 ⊠

關於李善蘭恆等式，如果有組合上的解釋，那一定很好。中國數學家華羅庚對這個恆等式給過一個數學歸納法的證明。

習題 **1.1** 在一圓上取相異的 n 個點，並連接這 n 個點所構成的弦。如果任意三條弦都不共點，則這些弦共有多少個交點。

習題 **1.2** 如果整數 r,n 滿足 $1\le r\le n$。證明：

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}.$$

習題 **1.3** 如果 n 是一個正整數，試問共有多少個數對 (a,b,c,d) 滿足

$$0\le a\le b\le c\le d\le n.$$

習題 **1.4** 證明恆等式

$$\binom{\binom{n}{2}}{2}=3\binom{n+1}{4},\quad n\ge 3,$$

並給此恆等式一個組合（或幾何）上的解釋。

動手玩數學

平面上任何不共線的 n 個相異點（$n\ge 2$），必可畫出一條直線恰通過其中的兩個點。

挑戰題

如果 p 是一個質數，n 是一個正整數且

$$\sqrt{1-\frac{1729}{p^n}}$$

是有理數，則求所有的數對 (p,n)。

2 佩爾方程式

設正整數 x, y 滿足 $x^2-2y^2=1$。證明：可以找到一個正整數 n 使得

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n.$$

【證明】圓錐曲線 $x^2-2y^2=1$ 為雙曲線，我們容易算得離原點最近的兩個正整數解為 $(3,2),(17,12)$ （註：$17+12\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^2)$）；而且若正整數 x, y 滿足

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n,$$

則

$$x^2-2y^2=(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n=1.$$

現在使用反證法，假設 x, y 為滿足 $x^2-2y^2=1$，不能表為

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解，並令整數數對 (x_0, y_0) 滿足

$$x_0+y_0\sqrt{2}=\frac{x+y\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=(3x-4y)+(3y-2x)\sqrt{2}.$$

我們有

$$\begin{cases} x_0^2-2y_0^2=1 \\ x^2-2y^2=1 \\ x>3, y>2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_0=3x-4y=\dfrac{9x^2-16y^2}{3x+4y}=\dfrac{x^2+8}{3x+4y}>0 \\ y_0=3y-2x=\dfrac{9y^2-4x^2}{3y+2x}=\dfrac{y^2-4}{3y+2x}>0 \\ x-x_0=-2x+4y=2\left(\dfrac{x^2-2}{2y+x}\right)>0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x_0<x, \\ 0<y_0, \\ x_0^2-2y_0^2=1, \\ x_0+y_0\sqrt{2} \text{ 不能表為 } (3+2\sqrt{2})^n \text{ 的形式。} \end{cases}$$

這與假設“x, y 為滿足 $x^2-2y^2=1$，不能表為

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解”矛盾。 ⊠

事實上，這個證明方法稱為費馬無限遞降法。類似此種的方程式

$$x^2-dy^2=1, \text{（}d\text{ 是個非完全平方的正整數）}$$

皆稱為佩爾方程式。佩爾方程式的正整數解通解都是先找一組最接近原點的正整數解，然後證明此最接近原點的正整數解可以生成所有其它的正整數解。歷史上最早研究佩爾方程式的人是印度數學家婆羅摩笈多（$598-665$ 以後），而諷刺的是佩爾從未研究過佩爾方程式。

習題 2.1 試求方程式

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 2.2 試求方程式

$$x^2 - 10y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 2.3 試求方程式

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 2.4 試求方程式

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 2.5 證明：可以找到無窮多個三邊長都是正整數且兩股差為 1 的直角三角形。

動手玩數學

有三所學校，每校都有 N 個學生。如果每一學校的每個學生至少認識其它兩個學校的 $N+1$ 個學生（這裡的認識是指互相認識），則是否一定有三個學生彼此互相認識？

挑戰題

數列 $< f_n >$ 定義如下：

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = 3f_{n+1} - f_n (n \geq 0).$$

證明：雙曲線

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1$$

滿足 $x > y$ 的正整數解必為

$$(x, y) = (f_{n+1}, f_n), \quad n \geq 1$$

的形式。

abc 猜想

如果一個正整數 N 的因數分解如下：

$$N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 為相異的質數； $n_1, n_2, \cdots, n_l$ 為正整數，則我們定義

$$F(N) = p_1 p_2 \cdots p_l.$$

有名的“abc 猜想”是說：是否存在一個正實數 κ 使得對任意兩兩互質且滿足 $a+b=c, abc \neq 0$ 的整數 a, b, c 恆有

$$\max\{\mid a \mid, \mid b \mid, \mid c \mid\} \leq \kappa F(\mid a \cdot b \cdot c \mid)。$$

多數數學家傾向於認為這個猜想是正確的。

3　一元三次方程式的判別式

3.1　回顧一元二次方程式

如果 p, q 是兩個實數，多項式函數 $f(x) = x^2 - px + q$ 在座標平面上的圖形為開口向上的拋物線。至於此拋物線與 x 軸相交（相切或相離）的情形完全由此二次方程式的判別式

$$\Delta(f) = p^2 - 4q$$

來決定。大概的情形是這樣的：

(1) 若 $\Delta(f) > 0$，則此拋物線與 x 軸相交於相異的兩點（或此方程式有相異的兩實根）。

(2) 若 $\Delta(f) = 0$，則此拋物線與 x 軸相切（或此方程式有相等的兩實根）。

(3) 若 $\Delta(f) < 0$，則此拋物線與 x 軸相離（或此方程式有相異的共軛複數根）。

上述三種情形的證明是基於下面簡單結果得到的：設 a, b 是方程式 $f(x) = 0$ 的兩個根，且不妨設

$$\begin{cases} a = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ b = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = p \\ ab = q \end{cases} \quad \text{（根與係數關係）}.$$

因此我們有

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = p^2 - 4q = \Delta(f).$$

所以一元二次方程式的判別式剛好是此二次方程式的兩根相減的平方。

3.2　一元三次方程式

如果 p, q, r 是三個實數，多項式函數 $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ 在座標平面上的圖形較前小節開口向上的拋物線為複雜。想要研究此曲線與 x 軸相交（相切或相離）的情形需引進此三次方程式的判別式。現在的問題是“何者是三次方程式 $f(x) = 0$ 的判別式”。我們想仿造二次方程式的作法，首先由函數 $y = f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ 的如下簡單性質：

(1) 當 x 值很大時，$f(x)$ 是正數（因為 $f(x)$ 的首項係數為 1）。

(2) 當 x 值是負很大時，$f(x)$ 是負數（因為 $f(x)$ 的首項係數為 1）。

及勘根定理（或繪圖觀察）得知：此類三次方程式至少有一個實根 a。因為 $x - a$ 可以整除三次多項式 $f(x)$，所以 $f(x) = 0$ 的另外兩個根必是某實係數二次方程式的根。再綜合前一小節的結果，我們有

定理 **3.1** 如果 p,q,r 是三個實數，那麼三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三根有如下兩種情形：

(1) 一實根，兩（相異）共軛複數根。

(2) 三實根。

仿造前一小節的情形，我們定義三次方程式的判別式如下：
設 a,b,c 是三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三個複數根（實數也是複數），則我們定義此方程式的判別式為

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

首先所碰到的問題是“如何將判別式 $\Delta(f)$ 改寫成僅與多項式 $f(x)$ 的係數 p,q,r 相關的式子”。這就是

定理 **3.2** 設

$$\begin{cases} p=a+b+c \\ q=ab+bc+ca \\ r=abc \end{cases}$$

試證明式子

$$p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2$$

與式子

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

相同。

【證明】令

$$F(a,b,c) \quad = p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2.$$

因為 p,q,r 三式都是 a,b,c 的對稱多項式（即將 a,b,c 互換之後所得到的式子與原式子一樣），所以多項式 $F(a,b,c)$ 亦是 a,b,c 的對稱多項式且其展開式中每一項的次數都是六次。因此只需比較多項式 $F(a,b,c)$ 與 $\Delta(f)$ 兩式中所有六次項的係數相同即可，又因為對稱多項式的關係，所以只需比較

$$a^6,a^5b,a^4b^2,a^4bc,a^3b^3,a^3b^2c,a^2b^2c^2$$

七項的係數即可。

(1) $F(a,b,c)$ 及 $\Delta(f)$ 在 a^6,a^5b 項的係數均為 0。

(2) $F(a,b,c)$ 在 a^4b^2 項的係數為

$$1-0+0-0=1,$$

$\Delta(f)$ 在 a^4b^2 項的係數為

$$1.$$

(3) $F(a,b,c)$ 在 a^4bc 項的係數為

$$2-4+0-0=-2$$

$\Delta(f)$ 在 a^4bc 項的係數為

$$-2.$$

(4) 同理可得 $F(a,b,c)$ 及 $\Delta(f)$ 在 $a^3b^3, a^3b^2c, a^2b^2c^2$ 項的係數亦相同。

因此證得 $F(a,b,c)$ 與 $\Delta(f)$ 相等。 ⊠

由這定理我們知道三次方程式的判別式 $\Delta(f)$ 是可表為僅與係數相關的多項式的形式。利用這種表示法我們有

定理 3.3 如果 p,q,r 是三個實數，那麼三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三根分佈有如下的判斷情形：

(1) 一實根，兩相異共軛複數根 $\Longleftrightarrow \Delta(f)=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2<0$。

(2) 三實根 $\Longleftrightarrow \Delta(f)=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2\geq 0$。

【證明】我們由前定理證得等式

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2.$$

設實數 a 及複數 $b=m+\sqrt{n}, c=m-\sqrt{n}$（其中 m,n 為實數）為方程式 $f(x)=0$ 的三根，則

(1) $(\Rightarrow)$ 若 $f(x)=0$ 的根是一實根，兩共軛複數根，則 $n<0$。此時

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2\\ &= 4n\left((a-m)^2-n\right)^2<0.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 若 $\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0$，則 a,b,c 不可能全為實數。因此 $n<0$，即 $f(x)=0$ 的根是一實根，兩共軛複數根。

(2) ($\Rightarrow$) 若 $f(x)=0$ 的根是三實根，則 $n\geq 0$。此時

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2 \geq 0.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 若 $\Delta(f)\geq 0$，則由

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2\\ &= 4n\left((a-m)^2-n\right)^2\end{aligned}$$

可知 $n\geq 0$，即 $f(x)=0$ 有三實根。 ☒

定理 3.4 如果 q,r 是實數，則三次方程式

$$f(x)=x^3+qx-r$$

的判別式為

$$\Delta(f)=-(4q^3+27r^2).$$

【證明】由上述公式（代入 $p=0$）馬上得到。 ☒

例題 3.1 試判別方程式

$$f(x)=x^3+\frac{1}{12}x+\frac{1}{27}=0$$

三根的分佈情形。

【解】根據判別式公式得到

$$\Delta(f)=-\left(4\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3+27\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^2\right)=-\frac{17}{16\cdot 27}<0.$$

所以此方程式的三根為一實根，二虛根。 ☒

習題 3.1 如果 q,r 是實數，考慮三次方程式

$$f(x)=x^3+qx-r=0.$$

若 $q>0$，則此方程式的三根是一實根，兩相異虛根。

習題 3.2 設 $F(a,b,c)$ 是一個整係數（含變數 a,b,c）的多項式。

(1) 如果 $F(a,a,c)=0$（即將原多項式的 b 換成 a），則證明

$$(a-b)\mid F(a,b,c).$$

(2) 如果 $F(a,b,c)$ 滿足

$$\begin{cases} F(a,b,c) = -F(b,a,c), \\ F(a,b,c) = -F(a,c,b), \\ F(a,b,c) = -F(c,b,a). \end{cases}$$

試證明

$$(a-b)(b-c)(c-a) \mid F(a,b,c).$$

習題 **3.3** 設複數 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是

$$x^3 - 21x - 7 = 0$$

的三個根。試求

$$(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma_1)$$

的值。

習題 **3.4** 設三次多項式 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$。

(1) 試判別 $f(x) = 0$ 有幾個實數根，並利用勘根定理求這些實數根介於哪些連續整數之間。

(2) 有幾個實數根可以表為 $2\cos\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ 的形式。

(3) 設 $x = 2\cos\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。試求 θ 之值。

動手玩數學

給定一個任意的凸四邊形，是否一定可以用直尺及圓規畫出一個三角形使得他們面積相等。

挑戰題

一個齊次多項式 $F(a,b,c)$ 是指 $F(a,b,c)$ 的每一單項的次數（是指 a,b,c 三變數的次數和）都一樣。例如：

$$F(a,b,c) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

是一個 3 次齊次多項式。

(1) 試找出所有滿足

$$\begin{cases} F(a,b,c) = -F(b,a,c), \\ F(a,b,c) = -F(a,c,b), \\ F(a,b,c) = -F(c,b,a) \end{cases}$$

的整係數 3 次齊次多項式 $F(a,b,c)$。

(2) 設

$$\begin{cases} p = a+b+c, \\ q = ab+bc+ca, \\ r = abc. \end{cases}$$

試證明

$$p^2q^2 - 4p^3r + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

(3) 符號 p, q, r 承 (2)，若 $F(a,b,c)$ 是一個整係數 3 次齊次多項式，且滿足

$$F(a,b,c) = F(b,a,c) = F(c,b,a).$$

試證明 $F(a,b,c)$ 可表為 p, q, r 的整係數多項式。

$\boxed{\text{和} = \text{積} = 1 \text{ 定理}}$

數學家愛爾特希在 1960 年到北京訪問時，曾提到“不知是否有三個有理數，使它們的和等於 1，它們的積亦等於 1”。隨後，中國數學家柯召解決此一問題，並將它發表在四川大學學報自然科學版。

4 再談佩爾方程式

定理 **4.1** (佩爾方程式) 如果正整數 s 不是完全平方數則證明：可以找到正整數數對 (x, y) 使得

$$x^2 - sy^2 = 1.$$

【證明】由定理 **??** 知道：可以找到無窮多的正整數序對 (x, y) 使得

$$x^2 - sy^2 = p,$$

其中 p 為滿足 $\mid p \mid \leq 1 + 2\sqrt{s}$ 的整數。因此可以找到兩組不相同的正整數序對 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 滿足

$$\begin{cases} x_1^2 - sy_1^2 = x_2^2 - sy_2^2 = p \\ x_1 \equiv x_2 \pmod{p}; y_1 \equiv y_2 \pmod{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p}\right)^2 - s\left(\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{p}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p} \text{ 與 } \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{p} \text{ 為整數.} \end{cases}$$

如果 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$，則令

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = n.$$

推得

$$p = x_1^2 - sy_1^2 = n^2(x_2^2 - sy_2^2) = n^2p \Rightarrow n = 1.$$

此與 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是兩組不相同的正整數數對矛盾。因此

$$\begin{cases} x = \left|\dfrac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p}\right| \\ y = \left|\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{p}\right| \end{cases} \qquad x, y \text{ 為正整數且滿足 } x^2 - sy^2 = 1.$$

所以存在正整數序對 (x, y) 使得

$$x^2 - sy^2 = 1.$$

$\boxtimes$

現在假設 (a, b) 是離原點最近且滿足 $x^2 - sy^2 = 1$ 的正整數解，我們想證明：所有方程式 $x^2 - sy^2 = 1$ 上的正整數解 (x, y) 都有如下的形式

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

定理 **4.2** 若 (x, y) 是方程式 $x^2 - sy^2 = 1$ 上的正整數解，則證明可以找到一個正整數 n 使得

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

【證明】假設 (x,y) 是不能表為

$$x+y\sqrt{s}=(a+b\sqrt{s})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解。顯然我們有 $x>a>1; y>b$。現在我們考慮整數數對 (x_0,y_0) 如下：

$$\begin{aligned}
x_0+y_0\sqrt{s} &= \frac{x+y\sqrt{s}}{a+b\sqrt{s}}\\
&= (x+y\sqrt{s})(a-b\sqrt{s})\\
&= (ax-bys)+(ay-bx)\sqrt{s}.
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
x_0^2-sy_0^2 &= (ax-bys)^2-s(ay-bx)^2\\
&= (a^2-sb^2)x^2-s(a^2-sb^2)y^2\\
&= x^2-sy^2=1.
\end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned}
x_0 &= ax-bys\\
&= \frac{a^2x^2-b^2y^2s^2}{ax+bys}\\
&= \frac{(a^2-sb^2)x^2+sb^2(x^2-sy^2)}{ax+bys}\\
&= \frac{x^2+sb^2}{ax+bys}>0\\
y_0 &= ay-bx\\
&= \frac{a^2y^2-b^2x^2}{ay+bx}\\
&= \frac{-b^2(x^2-sy^2)+(a^2-sb^2)y^2}{ay+bx}\\
&= \frac{y^2-b^2}{ay+bx}>0\ (\text{因為 } y>b)
\end{aligned}$$

及

$$
\begin{aligned}
x - x_0 &= -(a-1)x + bys \\
&= \frac{-(a-1)^2x^2 + b^2y^2s^2}{(a-1)x + bys} \\
&= \frac{-sb^2(x^2 - sy^2) + [sb^2 - (a^2 - 2a + 1)]x^2}{(a-1)x + bys} \\
&= \frac{-sb^2 + 2(a-1)x^2}{(a-1)x + bys} \\
&= \frac{2(a-1) + 2(a-1)sy^2 - sb^2}{(a-1)x + bys} > 0 \; (\text{因為 } a > 1, y > b)
\end{aligned}
$$

推得

$$
\begin{cases}
0 < x_0 < x \\
0 < y_0 \\
x_0^2 - sy_0^2 = 1 \\
x_0 + y_0\sqrt{s} \text{ 不能表為 } (a + b\sqrt{s})^n \text{ 的形式。}
\end{cases}
$$

此與 (x, y) 是不能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式，且離原點最近的正整數解矛盾；因此所有 $x^2 - sy^2 = 1$ 上的正整數解都能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式。 ⊠

習題 **4.1** 若一個正整數可表為

$$\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (\text{其中 } n \text{ 為正整數})$$

的形式，則稱此正整數為三角形數。證明：既是三角形數，又是完全平方數的正整數有無窮多個。

習題 **4.2** [1] 找一個正整數 n 使得：n 的所有正因數的平方和等於 $(n+3)^2$。

$\boxed{\text{動手玩數學}}$

若 $ABCDEF$ 是一個平行六邊形，即

$$AB // DE, BC // EF, CD // FA.$$

證明：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。

[1] 考慮 $n = pq$，其中 p 與 q 是相異質數。

$\boxed{\text{挑戰題}}$

試求所有邊長是正整數且面積恰與周長一樣的三角形。

$\boxed{\text{達文波特定理}}$

英國數學家達文波特有一個與 abc 猜想類似的結果。這個結果與多項式相關，敘述如下：如果 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為實係數多項式且滿足 $f(x)^3 - g(x)^2 \neq 0$，則我們有

$$\deg(f(x)^3 - g(x)^2) \geq \frac{1}{2}\deg f(x) + 1.$$

讀者是否能用初等的方法證明這個已知的結果呢？

5　分數問題

5.1　一則分數問題

我們對圓周率 $\pi = 3.141592653\cdots$ 及自然指數 $e = 2.718281828$ 這兩個常數很熟悉。除此之外，還有一個很有名的尤拉常數 γ 是由極限定義來的：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \doteq 0.577215\cdots .$$

如果將分數和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

通分，化簡成最簡分數（設此最簡分數為 b_n/a_n）。我們所碰到的麻煩是 a_n 很大。不僅會讓你算到手軟，即使是利用電腦，也很容易超過電腦的負荷，使電腦當機。因此想要進一步的瞭解分數 b_n/a_n 的一些算術的性質，必須採取別的方式才行。下一個例題就是借助同餘的方法來探討這個重要的分數。在此之前，我們先將整數同餘的概念，推廣至分數同餘。假設 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 是兩個分數。如果分數差 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ 通分後所得的最簡分數的分母不為 3 的倍數；但是分子卻是 3 的倍數，則我們計為如下的符號

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod 3.$$

例如

$$\frac{1}{4} \equiv -\frac{1}{5} \pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{9}{20}.$$

又

$$\frac{363}{140} \equiv 0 \pmod 3, \qquad \frac{761}{280} \equiv -1 \pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{363}{140} - 0 = \frac{3\cdot 121}{140}, \qquad \frac{761}{280}+1 = \frac{1041}{280} = \frac{3\cdot 347}{280}.$$

同理，很容易檢查

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &\equiv 0 \pmod 3,\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &\equiv 0 \pmod 3,\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &\equiv -1 \pmod 3.
\end{aligned}$$

這三個分數同餘式子告訴我們：分數 $b_2/a_2, b_7/a_7$ 的分母 a_2, a_7 不是 3 的倍數；分子 b_2, b_7 卻是 3 的倍數，而 a_8, b_8 都不是 3 的倍數。

例題 **5.1**　設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。試確定所有 n 的值使得 $3 \mid b_n$。

【証明】由計算得知首兩個成立的正整數為 $n=2,7$ 且 $n=8$ 不成立，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &= \frac{363}{140},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &= \frac{761}{280}.\end{aligned}$$

假設下一個成立的正整數 $n=3q+j>8\,(0\le j<3; q\ge 3)$。因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\equiv\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\equiv\cdots\equiv 0 \pmod 3$$

所以

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q})+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3.$$

因此

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}$$

的分子必為 3 的倍數才可能成立，即 $q=7$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} &\equiv \frac{1}{3}\left(\frac{363}{140}\right)+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3\\ &\equiv -1+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3.\end{aligned}$$

由簡易計算得 $j=1$，即 $n=22$ 且明顯的知道 $n=23$ 不成立。

利用同樣的方法設下一個成立的正整數為 $n=3q+j>23\ (0\le j<3; q\ge 8)$。因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3,$$

所以同理得 $q=22$，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\\ &\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3\\ &\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)\\ &\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}\right)\\ &\quad+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3\\ &\equiv\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\\ &\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3.\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3.$$

由

$$\begin{aligned}
j=0 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{66}\equiv 1\pmod 3\\
j=1 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{67}\equiv 2\pmod 3\\
j=2 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{68}\equiv 1\pmod 3
\end{aligned}$$

知 j 值不存在。故僅 $n=2,7,22$ 三個正整數合乎所求。 ☒

5.2 質數的倒數和發散

在證明下個定理之前，我們先介紹一個符號 $F_S(n)$。設 S 是由某些質數所構成的一個集合，函數 $F_S(n)$ 是指所有 $\leq n$ 且其質因數均落在 S 的正整數的個數。假設集合 S 的元素個數僅為有限個，因為每個正整數 x 均可表為 $x=sm^2\leq n$，其中 s 沒有平方因子，所以我們有

$$F_S(n)\leq 2^{|S|}\sqrt{n}.$$

定理 **5.1** 證明

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。

【証明】假設

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

是收斂的，則必存在一個正整數 n_0 使得

$$\sum_{p\text{ 是質數},\ p>n_0}\frac{1}{p}<\frac{1}{2}.$$

現在令 $n_0\leq n$ 且 S 代表所有 $\leq n_0$ 的質數所構成的集合。考慮正整數 $m(1\leq m\leq n)$ 且 m 含有不在 S 的質因數；這樣子的 m 的個數有

$$n-F_S(n)\leq\sum_{\text{質數 }p>n_0}\left[\frac{n}{p}\right]\leq\sum_{\text{質數 }p>n_0}\frac{n}{p}<\frac{n}{2}\text{ 個。}$$

因此得到 $\frac{n}{2}\leq F_S(n)\leq 2^{|S|}\sqrt{n}\leq 2^{n_0-1}\sqrt{n}$，即 $\sqrt{n}\leq 2^{n_0}$；因為 n_0 是固定的，當 n 變大時就產生了矛盾。因此

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。 ☒

習題 5.1 設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。試確定 n 的值使得 $5 \mid b_n$。

習題 5.2 設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不為正整數。

習題 5.3 設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

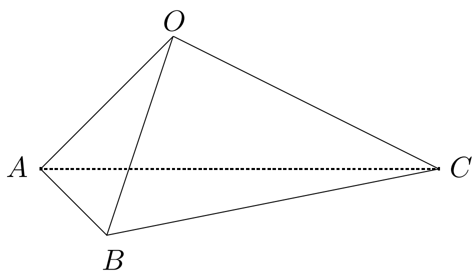
不為正整數。

動手玩數學

如圖：O-ABC 是一個四面體且邊長為 $BC=a, OA=a'; AC=b, OB=b'; AB=c, OC=c'$。試證明：

$$a+a', b+b', c+c'$$

可構成一個三角形的三邊邊長。



挑戰題

設 n 為正整數，試證明

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots$$

不為 3 的倍數。

分數問題

設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。是否有無窮多個正整數 n 使得

$$11 \mid b_n.$$

經由計算看出，應該有無窮多個正整數 n 滿足上述條件。

$\boxed{\text{交錯分數的同餘定理}}$

設 p 是一個質數。柯能證明：

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k\cdot 2^k} \pmod{p}.$$

孫智偉證明：

$$\sum_{k=1}^{[\frac{3p}{4}]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k\cdot 2^k} \pmod{p}.$$