凸函數及蕭爾定理

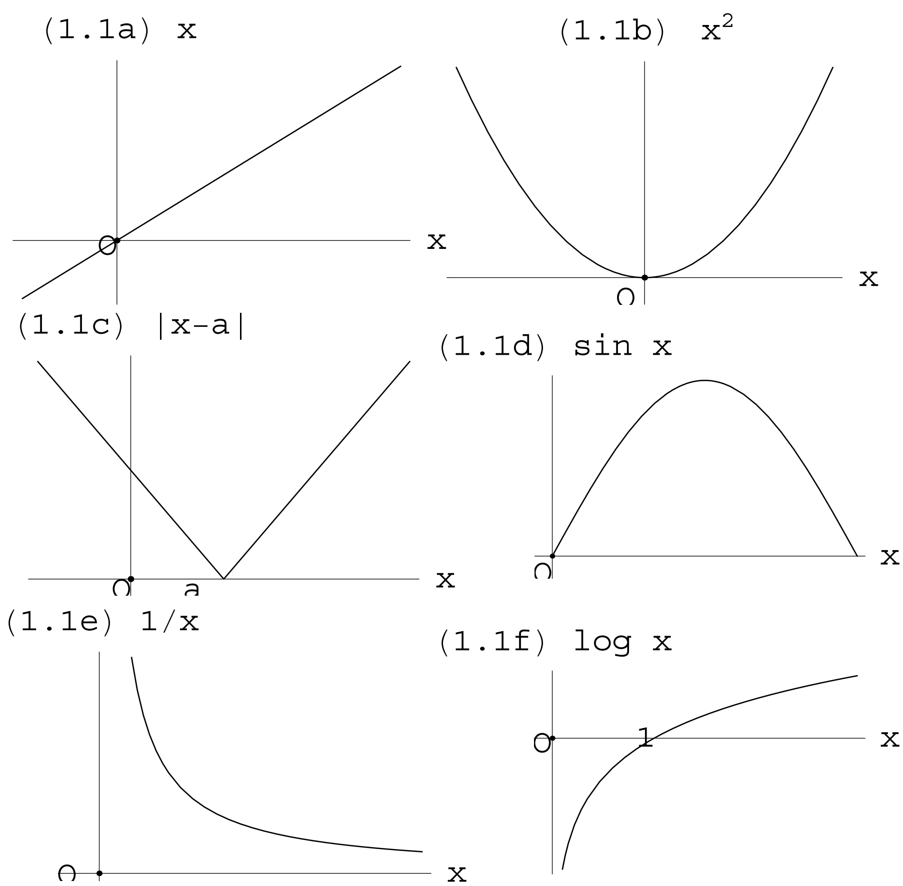
演講者：張福春教授
中山大學應用數學系
changfc@math.nsysu.edu.tw
日期: 2004.06.21

1 凸函數與凹函數

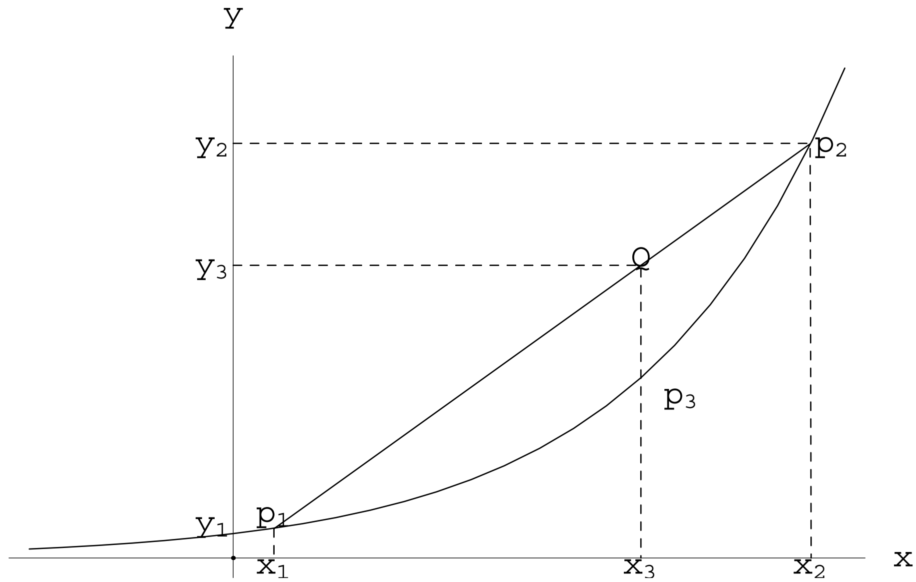
在解析幾何中，我們常用X，Y兩個座標表示兩個數x，y 的關係。通常我們稱x為變數y為x之函數。有時我們用$y = f(x)$來表示y與x的關係。例如

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \\ f(x) &= \sin x + \tan x \\ f(x) &= x \log x \\ f(x) &= 2^x \end{aligned}$$

都是x的函數。我們要記住這裏的x 在三角函數時代表的是弧度。(參看3.3)在圖1.1 a - f 中我們畫了一些常用函數的圖形。



從上面六個圖形我們可以看到有些$f(x)$ 的圖形像一個向上放著的碗(如圖1.1b, c, e) ，及有些圖形像一個蓋著的碗(例如1.1d, f)，我們把第一類函數稱之為凸函數(對x 軸而言是凸的)，而第二類的函數稱為凹函數。其中圖1.1a，$f(x) = x$ 是這兩類函數的媒介，我們把它包含在凸函數之內，同時也包含在凹函數之內。



從圖1.2我們不難看出凸函數有這樣的性質。

定義1.1 一個函數$y = f(x)$在$x \in (a, b)$ 區間稱之為凸函數，如果對任何$y = f(x)$上兩點P_1與P_2，連接P_1與P_2的直線都高於在P_1與P_2間的曲線$y = f(x)$。換言之，對任何$0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{1}$$

註：在圖1.2中，若令$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ，則(1)表示

$$f(x_3) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = y_3，$$

及Q點高於P點。

同理我們定義$f(x), x \in (a, b)$為一凹函數如果對所有的$x_1, x_2 \in (a, b), 0 \leq \lambda \leq 1$而言：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{2}$$

都成立。

例1.1 證明$f(x) = x^2$在$x \in R$上為一凸函數。

證 根據(1)式，我們需要證明對任何$x_1, x_2 \in R$及$0 \leq \lambda \leq 1$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2。 \tag{3}$$

展開簡化(3)之後可知(3)與$\lambda(1-\lambda)(x_1+x_2)^2 \geq 0$ 相同。故(3)式顯然成立，即$f(x) = x^2$為一凸函數。

有時候要證明(1)並不容易，下面的定理可以簡化許多凸函數的証明。

定理1.1 若$y=f(x), x\in(a,b)$滿足下列的二個條件

(i) 對任何(a,b)之間的三點x_1,x_2,x_3，若$x_1<x_2<x_3$，則$f(x_2)$不可能同時大於$f(x_1)$及$f(x_3)$，並

(ii) 對任何$x_1,x_2\in(a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]，$$

則$f(x)$為一凸函數。

這個定理從圖型上很容易看出來，但要證明它必須用到連續的觀念，我們把它的証明從略。

定理1.1的(i)往往很容易證明，如果一個函數是漸增，如$f(x)=x^3, x\in(0,\infty)$；漸減，如$f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,\infty)$，或先漸減而後增加，如$f(x)=x^2, x\in(-\infty,\infty)$，(i)都成立。只是條件(ii)往往要費比較多的工夫去證明。

我們若要證明一個函數為凹函數，我們只要證明這個函數的負值是凸函數就可以了。

定理1.2 若$f(x)$在$x\in(a,b)$區間為一凹函數，則$y=-f(x)$在同一區間為凸函數，反之亦然。

例1.2 試證$f(x)=\sin x, x\in(0,\pi)$為一凹函數。

證 若$x_1,x_2\in(0,\pi)$，則$-\pi<x_1-x_2<\pi, 0<\cos\frac{x_1-x_2}{2}<1$，故

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\le\sin\frac{x_1-x_2}{2} \tag{4}$$

又因$\sin x$在$x\in(0,\pi)$只有在$x=\pi/2$時取極大值，故$f(x)=-\sin x$，滿足定理1.1之(i)，又(4)乘負號之後滿足定理1.1之(ii)，故$-\sin x$為一凸函數，即$f(x)=\sin x$為一凹函數。

因凸凹函數有一個這樣簡單的關係，我們若知道凸，凹函數中一種的性質，必定也知道另一種了。在本書我們將只討論凸函數。

2 蕭爾(Schur)定理

在前面幾章我們看到一般不等式的證法都各有巧妙，似乎無一個規則可尋。蕭爾(Schur)在1923年發現了一個新的角度去看不等式，一下子歸納了並簡化了許多不等式的証明，要了解他的貢獻，我們必須下一點工夫去熟悉一個新的觀念。

我們知道如果一個不等式只包括一個變數，則其證法就相當容易。例如說$f(x)$是一個漸增的函數，則$x>y$就產生$f(x)>f(y)$。譬如說

$$\sin\frac{\theta}{2}\le\sin\theta\qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2};\qquad 3\log 3\ge 2\log 2$$

但一般我們想求證的不等式往往包含一個數列$x_1,x_2,\ldots,x_n$。蕭爾想到了一個比較兩數列“大，小”的方法，使得許多不等式的證明就像證明$x\le y$則$f(x)\le f(y)$一樣的容易。

在本章裏我們用大寫的X,Y,Z，等表示數列，而小寫的x,y,z表示數列裡的元素，即

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n),\qquad Z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$$

定義2.1 如果$(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$是一個$x_1, x_2, \ldots, x_n$的重組且$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$，則$(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$定義為實數列$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的一個漸減重組。

例如$(1, -2, 4, 3, 6, 3)$的漸減重組是$(6, 4, 3, 3, 1, -2)$。下面是蕭爾氏比較兩數列的方法。

定義2.2 $(Y \prec X)$

令$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}, y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \cdots \geq y_{(n)}$分別表示兩實數$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$的漸減重組，若

$$\begin{aligned} y_{(1)} &\leq x_{(1)} \\ y_{(1)} + y_{(2)} &\leq x_{(1)} + x_{(2)} \\ &\vdots \\ y_{(1)} + y_{(2)} + \cdots + y_{(n-1)} &\leq x_{(1)} + \cdots + x_{(n-1)} \\ y_{(1)} + y_{(2)} + \cdots + y_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i = x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(n)}. \end{aligned}$$

則我們定義X可以罩得住Y，並以$Y \prec X$表示之。

例如$X = (1, 2, 3), Y = (2.5, 1.2, 2.3)$兩數列，因

$$\begin{aligned} 3 &> 2.5 \\ 3 + 2 &> 2.5 + 2.3 \\ 3 + 2 + 1 &= 2.5 + 2.3 + 1.2 \end{aligned}$$

我們即說X可以罩住Y，亦得$Y \prec X$。

例2.1 令$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$為一實數列且定$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$，及$Y = (\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$為一含$n$個$\bar{x}$的數列，則$Y \prec X$。

證 很顯然$\sum x_i = \sum y_i = n\bar{x}$。令$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$。為$X$的漸減重組。則

$$x_{(1)} = \frac{1}{n}(x_{(1)} + \cdots + x_{(1)}) \geq \frac{1}{n}[x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(n)}] = \bar{x}$$

$$\begin{aligned} x_{(1)} + x_{(2)} &= \frac{1}{n}[x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(1)} + x_{(2)}] \\ &\geq \frac{1}{n}(x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(1)} + x_{(2)} + 2x_{(3)} + \cdots + 2x_{(n)}) \\ &= 2\bar{x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般而言

$$\begin{aligned} & x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(k)} \\ = \; & \frac{1}{n}[k(x_{(1)} + \cdots + x_{(k)}) + (n-k)(x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(k)})] \\ \geq \; & \frac{1}{n}[k(x_{(1)} + \cdots + x_{(k)}) + k(x_{(k+1)} + \cdots + x_{(n)})] = k\bar{x} \end{aligned}$$

故$Y \prec X$。下面這個定理把罩得住的觀念與凸函數的關係做了一個引線。

定理2.1 令$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$為兩實數列，且$X$與$Y$只有兩個元素不相同，設其位置在$i$與$j$上。(即$x_k = y_k$除非$k = i$或$j$)。則下列(i)與(ii)互為充要條件。

(i) $X \prec Y$

(ii) 有一個數$0 < \lambda < 1$，且$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda)x_j$
$y_j = (1-\lambda)x_i + \lambda x_j$

證 因i與j可在任何位置，因此我們不妨假設$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_i \geq \cdots \geq x_j \geq \cdots \geq x_n$ 。我們先由(i)推出(ii)。

因除了在i, j位置上的x, y皆相等又$Y \prec X$ 則必須有

$$x_i > y_i \qquad x_i + x_j = y_i + y_j$$

亦即$x_i > y_i \geq y_j > x_j$。若令

$$\lambda = \frac{y_i - x_i}{x_i - x_j}$$

則$1 > \lambda > 0$並很容易帶入而證得(ii)。

現若(ii)成立，則由於在i之前x, y皆相等，故對$k < i$ 而言，

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

又在$k = i$時

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \cdots + y_i &= x_1 + \cdots + x_{i-1} + \lambda x_i + (1-\lambda)x_j \\ &\leq x_1 + \cdots + x_{i-1} + \lambda x_i + (1-\lambda)x_i \\ &= x_1 + x_2 + \cdots + x_i \end{aligned}$$

這種不等的情形一直到$k \leq j$時又恢復了等式(因為$y_i + y_j = x_i + x_j$)故本定理成立。

定理2.2 令實數列$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$且$X$與$Y$不全相同並$Y \prec X$。則我們可找到一個數列$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$具備下面三個性質。

(i) $Y \prec Z \prec X$(即$Y \prec Z$且$Z \prec X$)

(ii) Z與Y比X與Y至少多一個相同的元素

(iii) Z與X最多只有兩個元素不同。

證 因本定理之證明與X, Y之排列法無關，不妨假定X, Y 已成漸減排列，即$X : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, Y : y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$因$Y \prec X$，故$\sum x_i = \sum y_j$。又因$x_i$與$y_i$不全相同，

必有一個k使得$x_k > y_k$，及一個$l, x_l < y_l$。取i為最大的k有$x_k > y_k$的性質，j為最小的$l > i$並$x_l < y_l$的性質。則X, Y與i, j 的關係必如下圖。

$$\begin{array}{ccccc} X: x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{i-1} \geq & \underbrace{x_i \geq x_{i+1} \geq \cdots \geq x_{j-1}} & \geq x_j \geq x_{j+1} \geq \cdots \geq x_n \\ \vee & \text{各個相等} & \wedge \\ Y: y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_{i-1} \geq & \overbrace{y_i \geq y_{i+1} \geq \cdots \geq y_{j-1}} & \geq y_j \geq y_{j+1} \geq \cdots \geq y_n \end{array}$$

即當$k = i+1, i+2, \ldots, j-1$時$y_k = x_k$(否則$i$應向右移或$j$向左移)。令

$$\begin{aligned} \delta &= \min(x_i - y_i, y_j - x_j) \\ \lambda &= \frac{\delta}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

由於$x_i > y_i \geq y_j > x_j$，可知$0 < \lambda < 1$。令z_k與x_k除$k = i, j$時皆相同，

$$z_i = x_i - \delta, z_j = x_j + \delta$$

由λ之定義可得

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - \delta = x_i - \lambda(x_i - x_j) = (1-\lambda)x_i + \lambda x_j \\ z_j &= x_j + \delta = \lambda x_i + (1-\lambda)x_j \end{aligned}$$

由定理2.1得知$Z \prec X$。因Z與X除i, j位置上之元素皆相同，又因δ只可能等於$x_i - y_i$或$y_j - x_j$，故很容易求出

$$\sum_{t=1}^{k} z_t \geq \sum_{t=1}^{k} y_t \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

及$\sum_{t=1}^{n} z_t = \sum_{t=1}^{n} x_t = \sum_{t=1}^{n} y_t$ 故$Y \prec Z$。即(i)得證。根據δ之定義，若$\delta = x_i - y_i$ ，則$z_i = y_i$，若$\delta = y_j - x_j$則$z_j = y_j$故(ii)成立。因X與Z除i, j位置均相同。(iii)亦證得。

系 在本定理中，我們可找到$Z_1, Z_2, \ldots, Z_s (s \leq n)$ 個數列使得

(i) $Y = Z_0 \prec Z_1 \prec Z_2 \prec \cdots \prec Z_s \prec Z_{s+1} = X$，

(ii) 所有Z_i與Z_{i+1}之間$(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$只有兩個不同的元素。

證 因X與Y最多只有n個不同的元素，由定理(ii)知$s \leq n$。現在我們可以證明本章的主要定理了。

定理2.3 (蕭爾定理)設$f(x)$在某給定之$[a, b]$區間，為一凸函數，又$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$兩數列元素全在$[a, b]$區間內，若$Y \prec X$，則

$$\sum_{k=1}^{n} f(y_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)。 \tag{1}$$

證 由定理2.2的系我們只需證明Y與X只有兩個元素不相同的情形就行了。(否則我們可由$Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$一直推下去)。令x_i, x_j與y_i, y_j不相同而其餘全相同，則(1)變成了

$$f(y_i)+f(y_j) \leq f(x_i)+f(x_j) \tag{2}$$

因$Y \prec X$，由定理2.1知道我們可以找到一個$0<\lambda<1$，且

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda x_i+(1-\lambda)x_j \\ y_j &= (1-\lambda)x_i+\lambda x_j \end{aligned}$$

由$f(x)$之凸性質得

$$\begin{aligned} f(y_i)+f(y_j) &= f(\lambda x_i+(1-\lambda)x_j)+f((1-\lambda)x_i+\lambda x_j) \\ &\leq \lambda f(x_i)+(1-\lambda)f(x_j)+(1-\lambda)f(x_i)+\lambda f(x_j) \\ &= f(x_i)+f(x_j) \end{aligned}$$

故(2)得證。

現在我們將看定理2.3有什麼用處。

例2.2 因$f(x)=\log x, 0<x<\infty$是凹函數(本章習題1)，則$g(x)=-f(x)$在$x\in(0,\infty)$為一凸函數。由例2.1知$(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，故由定理2.3可得

$$\sum_{i=1}^{n}(-\log \bar{x}) \leq -\sum_{i=1}^{n}\log x_i \quad (x_i>0, i=1,2,\ldots,n)$$

亦即

$$\bar{x} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

這就是幾何與算術平均數的不等式。

例2.3 因$f(x)=1/x$為一凸函數(本章習題1)則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{x}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \qquad x_i>0$$

即$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geq \frac{n}{\bar{x}}$

例2.4 有n個數$0 \leq x_i < 1$且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ，試證

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i} \geq \frac{n}{1-n}$$

證 我們先證$f(x)=\frac{x}{1-x}$，在$0<x<1$之間為凸函數。經過通分簡化可知

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\leq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

即

$$\frac{(x_1+x_2)/2}{1-(x_1+x_2)/2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}\right)$$

與$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\geq 0$相同。既證得$f(x)$為凸函數，又因$\bar{x}=\frac{1}{n}$，故$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)\prec(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，由定理2.3可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\geq n\cdot\frac{1/n}{1-(1/n)}=\frac{n}{1-n}\text{。}$$

例2.5 設$x_i,i=1,2,\ldots,n$為n個實數，a為一定數。令$\bar{x}=\sum x_i/n$，試證

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-a|\geq n|\bar{x}-a|$$

證 很顯然，由於$f(x)=|x-a|$是凸函數及$(\bar{x},\bar{x},\ldots,\bar{x})\prec(x_1,x_2,\ldots,x_n)$。

例2.6 由例2.1知$\sin x$在$x\in(0,\pi)$之間為凹函數，又在一三角形中，若以A,B,C表示其三頂角，則很容易求得

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\prec(A,B,C)\prec(\pi,0,0)$$

故$0\leq\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。 又$1\leq\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq 3\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}$。

例2.7 令$f(x)=\log\sin x,0<x<\pi$。則$f(x)$的凹函數性可由$\sin x_1\sin x_2\leq\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}$ 即$\cos(x_1-x_2)\leq 1$ 證得。由於$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 可證得

$$\log\sin A+\log\sin B+\log\sin C\leq\log\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$$

即$\sin A\sin B\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$。

蕭爾定理的用途可以推廣到很多超出本書範圍的不等式，一本很好的參考書是Marshall與Olkin所著" Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications "1979美國Academic Press出版。

1. 試鑑別下列各函數之凹凸性，

    (i) $f(x) = x, -\infty < x < \infty$。

    (ii) $f(x) = |x-a|, -\infty < x < \infty$。

    (iii) $f(x) = 1/x, 0 < x < \infty$。

    (iv) $f(x) = \log x, 0 < x < \infty$。

2. 設a, b, c為三正數，令$x = b+c-a, y = x+a-b, z = a+b-c$。求證

$$abc(xy+yz+zx) \geq xyz(bx+ca+ab)$$

3. 設$0 < x_i < 1, i = 1, 2, \ldots, n$且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$。試證

    (i) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1+x_i}{1-x_i}\right) \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

    (ii) $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geq (n+1)^n$

    (iii) $\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \geq (n-1)^n$

    [註:(i)在1975年被Klamkin發現，(ii)與(iii)在1970年發現]

4. 令$(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$為二組實數列令$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}, y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \cdots \geq y_{(n)}$分別表示它們的漸減重組。試證

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{(n)} - y_{(n-i+1)}|$$

5. 試證一定圓內接n邊形中，以正n邊形的面積最大。

6. 設$x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$，令

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{x_2+x_3}{2} \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= \frac{x_{n-1}+x_n}{2} \\ y_n &= \frac{x_n+x_1}{2} \end{aligned}$$

    試證$y_1 \cdot y_2 \cdots y_n \geq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ (此不等式在1969被Daykin所發現。)

7. 設a,b,c與a',b',c'為同周長兩三角形之三邊。若a',b',c' 均介於$\min(a,b,c)$與$\max(a,b,c)$之間。試證a',b',c'所圍成面積比a,b,c所圍成面積要大。

8. 試證在一銳角三角形A,B,C中

   (i) $\sqrt{2}\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

   (ii) $1\le\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

   (iii) $\frac{1}{2}\le\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

   (iv) $2\le\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

在下面幾題(9-12)中，A,B,C表一三角形之三角，a,b,c表其對邊長，s表示半周長，Δ表面積，令r表內切圓半徑，r_a,r_b,r_c表傍切圓之半徑，及h_a,h_b,h_c表三邊上的高。

9. 試證

   (i) $abc\le\frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

   (ii) $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\ge\frac{9}{s}$

   (iii) $abc\ge 8(s-a)(s-b)(s-c)$

10. 試證

$$h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\le r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$$

(註:此不等式在1966年被Nasser所發現)

11. 試證$\sqrt{s}\le\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\le\sqrt{3s}$

12. 試證

   (i) $h_ah_bh_c\ge 27r^3$

   (ii) $h_a+h_b+h_c\le 9r$

   (iii) $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\ge\frac{3}{r}$ (1966 Bokov發現)

   (iv) $\frac{h_a+r}{h_a-r}+\frac{h_b+r}{h_b-r}+\frac{h_c+r}{h_c-r}\ge 6$ (1965 Cosnita 與Turtoiu發現)

文章出處：

楊重駿, 楊照崑(1982)，不等式(第六章)。東華書局，台北。pp. 79-93.