二〇〇四亞太數學奧林匹亞研習營

組合專題

游森棚教授
國立高雄大學應用數學系

February 10, 2004

這個專題的目的是讓同學對 (亞太數學奧林匹亞水平的) 組合題有一些概念.

“凡是無法歸類的題目都是組合題”, 雖然有點誇張, 卻也相去不遠. 組合題有讚嘆的題目, 豐富的內容, 以及無窮盡的變化. 除了古典組合以外, 還有組合數論, 組合幾何等跨領域的問題, 以及許許多多的解題技巧.

這麼多的內容, 是無法短短用兩個小時的課來涵蓋的. 所以這份講義起個頭, 以題目帶出方法, 綜合地介紹競賽組合的樣貌. 離正式 APMO 考試還有近一個月, 希望各位同學能鞏固熟練部分, 補強不熟練部分, 發揮出潛力.

1 知識

一些基本知識, 必須先熟練. 這個營隊中有許多高手, 就近請教最快!

1. 基本的計數. 能運用高中課本 P, C, H, 加法原理, 乘法原理, 排容原理.
2. 基本的等式求和. 能運用二項式定理及代數運算.
3. 數學歸納法.
4. 推導出遞迴關係式及解二階線性遞迴方程式.
5. 鴿籠原理及簡單的 Ramsay 問題. 這部分請仔細研讀去年張鎮華教授的亞太營隊的專題講義.
6. 簡單的組合幾何知識, 及簡單的圖論知識. 方便將問題化爲點和邊來看.

2 模式, 方法與技巧

組合題不能用題型來分類. 即使是看起來相同的題型, 結論解題方法可以完全不一樣 (參看習題). 這也是組合數學題的難點. 所以在基本知識有了後, 重點應該放在吸收方法和技巧上, 以及培養解題經驗和直覺. 姑且不論能熟練應用這些模式, 方法與技巧, 但是

至少先必須知道 "有" 這些方法, "有" 這些技巧.

過多的題目不一定有益, 但是適度的練習顯然是必要的. 再者, 組合題非常靈活, 所以要見招拆招.

但是還是有幾個模式可以依循. 最常見的模式是要求某個值, 要先估計出邊界, 然後構造出邊界. 另一個常見的模式是猜出答案, 然後用數學歸納法證. 此外, '組合題' 幾乎都是需要觀察實驗的. 所以要有做實驗的習慣.

組合題到了亞太數學競賽的階段, 通常一個問題都結合兩個以上的方法.

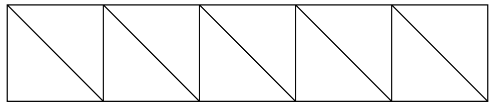
2.1 計數: 基本原理, 遞迴, 對應, 算兩次

基本的計數包含分類 (加法原理), 各個擊破 (乘法原理), 多的扣掉 (排容原理).

我們先看一個基本計數的例子.

例題 1 有一座機器共有 $4n$ 個接點, 每兩個接點之間都有紅線或藍線相連. 這部機器如果任拿掉一雙同色線就會停擺. *(*拿掉的一對同色線連接的四個頂點沒有重複*)*. 證明拿掉紅色線而使得機器停擺的方法數, 等於拿掉藍色線而使得機器停擺的方法數.

解:



運用遞迴的方法也是基本的. 關鍵是要先找到遞迴式.

例題 2 如上圖, 求由左上角走到右下角的將圖形一筆畫走完的方法數.

解:

另一個特別的手法是富比尼原理 (Fubini's Principle), 又稱爲算兩次原理. 簡單來說就是用兩個方法算同一個值. 用表列來看就是橫的先加完再直的加, 等於直的先加完再橫的加. 一個簡單的例子是

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

圖論中的握手定理

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2e$$

也是 Fubini 原理的簡單推論.

例題 3 *(1987 IMO-1)* 設 $\sigma = a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲 $1, 2, \ldots, n$ 的一個排列. 滿足 $a_i = i$ 的數稱爲這個排列的不動點. 假設不動點個數爲 k 的排列有 $f_n(k)$ 個. 證明

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot f_n(k) = n!.$$

解:

另外一個組合計數有力的方法是對應. 對應不止只是爲了避掉麻煩的計算而已, 對應其實是一個數學方法.

例題 4 *(2002 全國能力競賽)* 考慮 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的元素個數 ≥ 2 的所有部分集合. 如果這個部分集合中的元素的算術平均數是整數的話, 稱這個集合是好集合. 證明好集合的個數是偶數個.

解:

以上是基本的內容, 組合題的精彩是接下來這些形形色色的方法.

2.2 構造

構造能力是數學競賽非常喜歡測試的, 因爲這最難訓練. 構造時把握一個原則: 必須合

理, 簡單, 有美感.

估計與構造可能是最常見的.

例題 5 *(2003 全國能力競賽)* 正八邊形的對角線將正八邊形分成 90 小塊. 試求出所有的 n 使得在其中 n 塊塗色後滿足*:* 每一個由原八邊形的頂點所形成的三角形都恰包含一塊塗色的區域.

解:

構造也常常和反證法結合.

例題 6 *(1995 APMO-5)* 找一個最小的正整數 k, 使得我們能找到一個從整數集 $\mathbf{Z}$ 映到 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 的函數 f, 對所有 $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$ 都滿足 $f(x) \neq f(y)$.

解:

純粹的構造是有的 (通常都很不容易!).

例題 7 *(1990 APMO-6)* 對於任意整數 $n \geq 6$, 存在一個凸六邊形, 可以分成 n 個全等三角形.

解:

2.3 奇偶分析

奇偶分析是組合題的重要方法.

例題 8 *(1993 APMO-5)* 假設 $P_1, P_2, \ldots, P_{1993} = P_0$ 爲平面上相異的 1993 個點, 且具有下列性質:

(1) 對每個 $i = 1, 2, \ldots, 1993$, P_i 的座標 x_i, y_i 都是整數.

(2) 對每個 $i = 0, 1, \ldots, 1992$, 線段 P_iP_{i+1} 除了端點 P_i, P_{i+1} 外, 不含其他具有兩坐標均爲整數的點.

證明其中至少有一個 i, $0 \leq i \leq 1992$, 使得線段 P_iP_{i+1} 上有一點 $Q(q_x, q_y)$ 滿足 $2q_x$ 和 $2q_y$ 都是奇數.

解:

2.4 實驗與數學歸納法

許多組合題要先用實驗找到答案.

例題 9 *(Joseuf 問題) 2004 (其中一個是 Joseuf) 個人落入食人族手中被迫排成一圈依序報數 $1, 2, 1, 2 \ldots,$ 每報到 2 的就被拖出去砍了, 但最後一個可以被釋放. 聰明的 Joseuf要站在哪一個位置才會得救?*

解:

2.5 極端原理

考慮極端情形常有意外收穫. 以下這個例題相當有名.

例題 10 *(Sylvester) 若 S 爲平面上的有限點集, 若 S 中任兩點連線都至少還通過 S 中的另一個點. 證明一定 S 中的點都在同一直線上.*

解:

2.6 對策

對策側重在邏輯推理. 利用對稱性的思考是常見的. 這一類的題目方法差異性很大, 彼此非常不同, 有時要有創意的想法. 我們舉一個用到分類的例子.

例題 11 *甲乙兩人玩遊戲, 甲先開始, 一開始有兩堆糖果. 每一次動作都將糖果拿走一堆, 然後將剩下的一堆分成兩個小堆 (個數可以不同). 拿到最後一個糖果的獲勝. 如果一開始兩堆糖果分別有 $2003, 2004$ 個, 請問誰有必勝策略?*

解:

2.7 賦值與不變量

猜答案是不存在時, 可考慮賦值 (將棋盤塗色之類的奇偶分析其實也算賦值的一種), 或尋找不變量. 這有較高的技巧性.

例題 12 *從集合 $\{3, 4, 12\}$ 開始, 每次都任選兩個數 a, b 換成 $\frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$. 是否能在有限多次內將三個數換成 $\{4, 6, 12\}$?*

解:

2.8 其他

另外組合競賽題還有許多的內容需要有系統的介紹, 至少包括

1. 生成函數等計數方法.
2. 鴿籠原理與 Ramsey 問題
3. 圖論
4. 構造專題
5. 極值問題
6. 組合幾何

但無論如何,

競 賽的精神是創造力, 非這些特別知識不能解的問題是極少數.

我們等到國手選訓營時再做有系統的介紹.

3 歷屆亞太的組合試題

亞太的組合題題號目前爲止幾乎都是 $4, 5$, (唯一一題 1 的事實上是當年的最難題). 因此都不容易, 除了少數幾題 (1994-5) 要用到特別的知識之外, 用到的手法就是上面介紹的這一些, 因此絕非遙不可及. 以下稍微整理歷屆亞太試題的組合試題 (有一些事實上與數論, 幾何, 代數互相滲透, 難以歸類). 知己知彼, 溫故知新.

問題 1 *(1989 APMO-4)* 設集合 S 是由 m 個有序數對 (a, b) 所成的集合, 其中 a, b 均爲整數且 $1 \leq a < b \leq n$. 並定義集合 T 爲由有序數對 (x, y, z) 所形成的集合, 其中 x, y, z 滿足 $(x, y), (y, z), (z, x)$ 屬於 S. 試證明 T 的元素個數至少有

$$\frac{m(4m - n^2)}{3n}$$

個.

問題 2 *(1990 APMO 4)* 將 1990 個人按照下列方法分組:

(1) 每組中沒有人認識同組中的所有人.
(2) 在同組中的任何三人中, 至少有兩人互不認識.
(3) 在同組中的兩人, 若互不認識, 則在該組中恰有一個人認識這兩人.
證明在每一組中的每個人在該組中所認識的人數相同, 並確定最多可分幾組.

問題 3 *(1990 APMO-5)* 對於任意整數 $n \geq 6$, 存在一個凸六邊形, 可以分成 n 個全等三角形.

問題 4 *(1991 APMO-4)* 在學校下課休息時, n 爲學生繞著老師爲成一圈玩遊戲. 老師根據下規則延順時針方向走過每一個同學面前分給某些學生糖果: 他選定一位學生給他一塊糖, 然後跳過一位再給下一位學生一塊糖, 接著跳過兩位再給下一位學生一塊, 然後跳過三位... 等等. 試求所有的 n 值使得每位學生至少都能拿到一塊糖 (老師可能要繞許多圈).

問題 5 *(1992 APMO-5)* 在各項都不爲 0 的整數且任意連續 7 項之和均爲正數, 而任意連續 11 項之和均爲負數的所有數列中, 試找一個項數最多的數列.

問題 6 *(1993 APMO-5)* 假設 $P_1, P_2, \ldots, P_{1993} = P_0$ 爲平面上相異的 1993 個點, 且具有下列性質:

(1) 對每個 $i = 1, 2, \ldots, 1993$, P_i 的座標 x_i, y_i 都是整數.

(2) 對每個 $i = 0, 1, \ldots, 1992$, 線段 P_iP_{i+1} 除了端點 P_i, P_{i+1} 外不含其他具有兩坐標均爲整數的點.

證明其中至少有一個 i, $0 \leq i \leq 1992$, 使得線段 P_iP_{i+1} 上有一點 $Q(q_x, q_y)$ 滿足 $2q_x$ 和 $2q_y$ 都是奇數.

問題 7 *(1994 APMO 5)* 設 A, B, C 爲三組數, A 爲包含所有 10^k 形式的數, 其中 k 爲大於或等於 1 的整數, 而 B, C 兩組所含的數分別爲 A 組中的數換爲以 2 爲底以及以 5 爲底的數. 對於每一個大於 1 的整數 n, 試證在 B 或 C 這兩個集合中, 有且僅有一個集合含有爲一個一個數恰爲 n 位數.

問題 8 *(1995 APMO-5)* 找一個最小的正整數 k, 使得我們能找到一個從整數集 $\mathbf{Z}$ 映到 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 的函數 f, 對所有 $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$ 都滿足 $f(x) \neq f(y)$.

問題 9 *(1996 APMO-3)* 國家婚姻局希望安排 n 對夫婦滿足下列條件的 17 組:

(1) 每一組的成員都是同一種性別, 也就是全爲男性或是全爲女性.

(2) 任何兩組的成員人數之差爲 0 或 1.

(3) 每一組都至少有一個人.

(4) 每個人都必須恰好屬於某一組.

試找出所有 ≤ 1996 中可能的 n 值, 並證明之.

問題 10 *(1997 APMO-5)* 有 n 個人 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 圍成一圈而坐. 設 A_i 有 a_i 個物件, 而且 $a_1 + \ldots + a_n = nN$, 其中 N 爲一個固定的正整數. 假設 A_i 每次可以傳給相鄰的 A_{i-1} 或 A_{i+1} 一個物件, 亦可自相鄰的 A_{i-1} 或 A_{i+1} 獲得一個物件, 其中 $A_{n+1} = A_1, A_0 = A_n$. 爲了讓每一個人最後都有相同數量的物件, 試問他們應該如何傳遞才可使得傳遞的總次數爲最少?

問題 11 *(1998 APMO-1)* 設 n 爲一正整數, F 表示 n 重集合 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 所構成的集合族, 其中每一個 A_i 都是 $\{1, 2, \ldots, 1998\}$ 的子集合, $i = 1, 2, \ldots, n$. 且設 $|A|$ 表示集合 A 的元素個數. 試求出下列的級數和.

$$\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup |$$

問題 12 *(1999 APMO-5)* 給定平面上 $2n+1$ 個點所成的集合 S, 其中任三點都不共線, 且任四點都不共圓. 若一個圓的圓周上恰含有 S 的三個點, 其內部恰含有 S 的 $n-1$ 個點, 而外部也恰含有 S 的 $n-1$ 個點, 則稱此圓是一個好圓. 試證: 好圓的個數與 n 有相同的奇偶性.

問題 13 *(2000 APMO-5)* 給定數列 $0, 1, \ldots, n$ 的一個排列 $a_0, a_1, \ldots a_n$. 當 $i > 0, a_i = 0$ 且 $a_{i-1} + 1 = a_j$ 時, 將 a_i 與 a_j 互換, 稱爲一次 "合法轉換". 若排列 $a_0, a_1, \ldots a_n$ 可經由有限次合法轉換而得到 $1, 2, \ldots, n, 0$, 則稱此排列爲正規排列. 試問哪些 n 能使排列 $1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 0$ 是一個正規排列?

問題 14 *(2001 APMO-5)* 試找出最大的整數 n, 使得在平面上存在 $n+4$ 個點 $A, B, C, D, X_1, X_2, \ldots, X_n$ 滿足 $AB \neq CD$ 及以下條件: 對任意 $i = 1, 2, \ldots, n$, 與 ΔABX_i 必 ΔCDX_i 全等.

問題 15 *(2003 APMO-5)* 在一組人中, 若不論他們如何組成, 我們總是至少可以做到下面兩情形之一:

(1) 可找出 m 個雙人組, 使得各雙人組之內彼此都認識; 或者

(2) 可找出 n 個雙人組, 使得各雙人組之內彼此都不認識.

(其中 m, n 都是正整數, 在選雙人組的時候, 每個人最多只能歸屬於一個雙人組) 問這一組人至少要有幾個人?

這些問題的答案網路上都可以找得到, 或是參考各期的科學教育月刊, 或者請教老師. 最好的方法是多認識這個營隊的朋友, 營隊結束後仍然可以互相討論互相支援.

4 習題

這裡選出了 21 個問題, 大致上按由易到難排列 (這個說不準的). 用到上面所提到的各式各樣的技巧, 同學們可試試看. 後半段有幾個題目不甚容易, 需要仔細思考. 做不出來就互相討論, 這個營隊高手如雲, 總是有人做得出來的. 若眞的有困難, 提示約於半個月後公布於網頁 http://home.kimo.com.tw/giawgwan 上, 可前往參考.

習題 1 關於計數.

1. 有多少組整數 (a,b,c,d) 滿足 $0 \le a \le b \le c \le d \le 10$?
2. 以 n 正邊形的頂點爲頂點可構成多少個鈍角三角形?
3. 從 $(0,0)$ 走捷徑到 (n,n), 有多少條路全部落在 $x \ge y$ 的半平面中?

習題 2 關於遞迴.

1. 求 *Lucas* 數列 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 的一般項公式.
2. 對於 $n \ge 0$, 證明
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = f_{n+1}.$$
其中 $\{f_n\}$ 爲 *Fibonacci* 數列, $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
3. 將圓等分成 n 個扇形, 塗上顏色, 共有 3 個顏色可用, 但是相鄰扇形不同色, 若圓不可以旋轉, 請問共有幾種塗法?
4. $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 199$,
$$a_n = \frac{1989 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}},$$
證明數列 $\{a_n\}$ 每一項都是整數.

習題 3 基本求和.

1. 求和 $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.
2. 求和 $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.
3. 求證 $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

習題 4 對於元素爲正整數的一個非空集合, 將元素由大到小排列成 $a_1 \ge a_2 \ge \ldots$, 然後計算 $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ 稱爲這個集合的交錯和. 求 $\{1, 2, \ldots, 2004\}$ 所有非空子集合的交錯和的總和.

習題 5 座標平面上有一個 142×857 的長方形 $ABCD$, 四個頂點都是格子點. 證明在長方形內部不可能找到一條五段的折線, 各端點都是格子點, 連結 A, C, 且折線各段長度比依次爲 $2:3:4:5:6$.

習題 6 甲乙二人玩遊戲, 甲從 $\{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ 中劃掉 9 個數, 乙再劃掉 9 個數, 甲再劃掉 9 個數, 以此類推. 剩下兩數的差爲甲的得分. 請問甲在最佳策略下, 至少可以得多少分?

習題 7 在 20 個城市之間有 172 條航線. (兩城市之間的直飛稱爲一條航線). 證明可以從任一個城市飛往任一個城市 (包括直飛或轉機).

習題 8 如果一個凸多面體任何兩個頂點間都有稜相連, 證明它只能是四面體.

習題 9 設 $n > 2$ 爲整數, 若有一個定義在平面上的函數 $f : R^2 \longrightarrow R$ 滿足對於任何平面上的正 n 邊形 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 都有

$$f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_n) = 0,$$

證明 $f \equiv 0$.

習題 10 *IUO* 評審委員會由 34 個國家參加. 每一國由領隊和副領隊參加. 會前大家寒暄握手, 但同一個國家的領隊和副領隊這兩人之間不握手 (否則就太好笑了). 會後主辦國的領隊問 (除了自己以外的) 每一個人握手的次數, 結果答案竟然都不同! 請問主辦國的副領隊和多少人握手?

習題 11 多想一點.

1. 正 n 邊形內至少要放多少點, 才能使得由 n 邊形的任意三個頂點所構成的三角形內部都至少包含一個點?

2. 求出所有整數 $n \geq 3$ 使得存在平面上的 n 個點, 滿足: 從構成這 n 個點的凸包 *(convex hull)* 的頂點中, 任取三個頂點所構成的三角形中都恰含一個點.

習題 12 以下 "認識" 皆是互相的.

1. (惡劣的主人 *Part I*) n 個人參加宴會, 已知至少有兩人互相認識. 證明可以將這 n 個人分成兩組, 使得同組中的朋友對數小於異組中的朋友對數.

2. (惡劣的主人 *Part II*) n 個人參加宴會. 證明可以將這 n 個人分成兩組, 使得每個人在同一組認識的人比在另一組所認識的人少.

習題 13 某次聚會任兩個人致意的方式爲四種中的一種 (點頭, 握手, 接吻, 擁抱). 大雄與阿福點頭, 但是沒和技安點頭. 已知對於任意三個人, 兩兩致意的方式或者全部相同, 或者全部不同. 問這次聚會最多有多少人?

習題 14 $n(\geq 4)$ 個盤子裡放有總數 ≥ 4 的糖. 每次操作都是從任選的兩個盤子中各取一塊糖放到另一個盤子中. 問是否能把所有的糖集中到一個盤子裡去?

習題 15 *IHO* 與 *IUO.*

1. *(IHO, International Handsome Olympiad)* 在 *IHO* 中, 每一位參賽者都恰好與任一個參賽者比帥一場. 在每一場比賽中, 勝方得到一分, 負方得到零分, 平局各得 $\frac{1}{2}$ 分. 在所有賽程結束後統計發現, 每一位選手所得總分的一半是來自於和總得分最低的十位選手的比賽中. (因此, 對於總得分最低的十位選手來說, 他們之中任何一位的總得分其中有一半是來自於和其餘九位選手的比賽中). 請問這一個競賽有幾人參加?

2. *(IUO, International Ugly Olympiad)* 在 *IUO* 中, 每一位參賽者都恰好與任一個參賽者比醜一場. 在每一場比賽中, 勝方 (較醜者) 得到三分, 負方得到零分, 平局各得一分. 比賽結束後醜王 (總分最高者) 居然發現自己勝場是最少的. 請問這個比賽至少有幾個人參加? (醜王只有一人, 參賽者不只一人).

習題 16 在正方形 A, B, C, D 上玩下列遊戲: 一開始 A 頂點上有 6789 元, 其餘三個頂點空著. 每次的操作可以將任何頂點上移走任意多元, 但是同時要在相鄰的兩頂點上各放上拿走錢數的兩倍元. 問能否在有限次操作內得到四個頂點分別爲 $6, 7, 8, 9$ 元?

習題 17 以下各小題組合數的上下標均爲非負整數, 上標 $\geq$ 下標.

1. 何時 $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$ 成等差數列?

2. 證明 $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$ 不可能成等差數列.

習題 18 將 2×2 的正方形挖去一格成爲一個 L 形, 稱爲一個虧格. 問是否能用很多個虧格覆蓋 5×7 的棋盤, 使得每一格上面覆蓋有同樣多層的虧格?

習題 19 已知黑板上寫有 $1, 2, \ldots, n$ 這些數. 每一次可以擦掉兩數 a, b, 但是要寫上 $a + b, |a - b|$ 兩數. 已知經過某些次操作後黑板上的數全部是同一個值. 問這個值可能是多少?

習題 20 平面上的點集 M, 如果任意兩點的垂直平分線會通過 M 上的點, 則稱 M 是好集合. 問好集合的元素個數可以是多少?

習題 21 設 B_n 爲所有長度爲 n 的二元字串所成的集合. 給定兩字串 $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$, 定義此兩字串間的距離爲

$$d((a_i),(b_i)) = \sum_{k=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

令 C_n 是 B_n 的子集合. 若對於每個 B_n 中的字串 (b_i) 都存在 C_n 中唯一的字串 (c_i) 滿足

$$d((b_i),(c_i)) < m,$$

則稱 C_n 爲長度爲 n 且容忍度爲 m 的完美誤差校正碼. 證明不存在長度爲 90 且容忍度爲 2 的完美誤差校正碼.

5 結語

解好的競賽題如同小型的探索, 可以讓同學稍體會科學探究辛苦卻刺激的過程. 好的競賽題更能讓我們體會數學的美. 希望同學們在奮力準備解題之餘, 更能保持對數學研究的興趣, 和追求更高深學問的心.