數論專題

左太政/高雄師範大學數學系

一、解題活動

學習如何解決問題是學習數學的主要原因, 而 數學的能力主要有三種: 概念理解、程序知識、問題解決, 其中以問題解決 (即解題) 爲數學教育的重心。解題能力的培養是學習數學的重要課題, 通常數學解題的過程可依下列四個步驟:

1. 瞭解問題-審查題意, 發掘概念內涵; 若題意不了解, 不妨再閱讀二至三次, 直至了解題意。
2. 擬定計畫-分析問題及產生聯想, 尋求解題途徑
   (1). 儘可能畫出圖形或表格
   (2). 檢查特例如令問題中整數取 1, 2, 3, 4, 5 等代入, 看看是否可歸納出規律來。
   (3). 嘗試簡化問題如利用對稱性、採用『不妨假設』而不失問題的一般討論方式。
   (4). 保留任何解題的紀錄, 以便先做別題後再回頭解本題時參考使用。
3. 實行計畫-選擇策略及綜合運用知識去進行推理計算解決問題
4. 回顧解答-驗證答案是否合理及思考結果或方法能否用於解其他問題, 甚至於自己修改原問題或推廣其結論, 形成另一個問題。

簡言之, 通常解題活動先從題目待答或待證明的地方著手 (Request), 適時引進題目的以之條件及潛在的性質 (Response), 最後導出結果 (Result).

二、數論簡介

「數論」是理論數學最古老的分支之一, 亦是領域範圍最廣之一, 主要是研究整數的性質和方程的整數解, 甚至於有理數。

1. 基礎數論主要探討整數的整除性, 含除法原則、歐幾里德原則、因數與倍數、質數的基本性質 (質因數分解及質數有無限多個)、同餘、費瑪小定理 (Fermat's little theorem)、尤拉定理 (Euler's geralization theorem) 等。基礎數論也研究其它主題如線性同餘方程組解的問題 (中國餘數定理)、費波納希數列的性質、畢氏數組等。

2. 其它數論的研究與其他數學領域結合, 如 Diophantine 方程 ，方程 $x^a-y^b=1$ 之整數解問題, 及四個完全平方數定理 (任意正整數 n 必可表爲四個整數的平方之和) 等, 其餘如代數數論、組合數論等。

三、基本性質

定理 1. 設 n 爲正整數, p 爲質數, 若 $\alpha=\alpha(p,n)$ 滿足條件 $p^\alpha \mid n!, p^{\alpha+1} \nmid n!$, 則

$$\alpha=\alpha(p,n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

推論 2. 設 n 爲正整數, 則

$$n!=\prod_{p\le n}p^{\alpha(p,n)}.$$

應用 3. 設正整數 $a_k(1\le k\le m)$ 滿足 $n=a_1+a_2+\cdots+a_m$, 試證: $\dfrac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}$ 是整數。

應用 4. 設 n 爲正整數, 試證: 任意 m 個連續正整數的乘積必能被 $n!$ 所整除。因此我們可得 $C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 爲整數。

四、費瑪小定理與尤拉定理

定理 1 設 a 爲大於 1 的正整數, 若 a^n+1 是質數, 則 a 爲偶數且 n 是 2 的冪次方。

定理 2 設 a 爲大於 1 的正整數, 若 a^n-1 是質數, 則 $a=2$ 且 n爲質數。
由上述定理可得下列兩特殊的數: 費馬數 (Fermat number): $2^{2^n}+1$
梅森尼數(Mersenne number): 2^p-1, 其中 p 是質數。

費瑪小定理 3 若 p 爲質數且 a 爲任意整數, 則 $a^p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,p)$. 特別的是, 當 $p\nmid a$, 則 $a^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$

尤拉定理 4 設 a,n 爲互質的正整數數, 則 $a^{\phi(n)}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,n)$.

Wilson 定理 5 設 p 爲質數, 則 $(p-1)!\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,p)$.

五、練習題

1. (1). 若 n 不是質數, 則 2^n-1 亦不是質數。
   (2). 若 n 爲奇質數, 則 2^n-2 必爲 $2n$ 的倍數。

2. 設 $n>1$ 爲整數, 試證 n 不能整除 2^n-1.

3. 試求所有質數 n 使得 2^n+1 被 n^2 所整除。

4. 若奇數 n 不能被 5 所整除, 試證 n 必能整除一數形如 $99\cdots9$.

5. 設 p 爲奇質數, 試證 任意 $2p-1$ 個整數中必可找到 p 個整數, 使得這 p 個整數之和必爲 p 的倍數。

6. 試求滿足方程式 $x^y+y^z=z^x$, 其中 $x\leq y\leq z$ 的 所有正整數解 x,y,z.

7. 設 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 爲一數列, 若

$$a_0=4004,\quad a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1},\quad n=0,1,2,...,2003.$$

試證: $[a_n]=4004-n,\quad n=0,1,2,...,2003$, 式中 $[x]$ 爲小於或等於 x 的最大正整數。

8. 試證: 對任意正整數 n, 則 $n(n+1)$ 不能表爲 m^k 的形式, 其中 $m>0,k>1$ 皆爲正整數。

9. 試證: 對任意正整數 a,b,p, 則 必存在二個互質的整數 m,n, 使得 $am+bn$ 爲 p 的倍數。

10. 試求所有正奇數 n 使得 $(n-1)!$ 不能被 n^2 所整除。

11. 試求一正整數的最大完全平方數使得這個平方數不是 10 的倍數, 且當我們去掉這個數的末二位數時, 所餘下的數仍爲完全平方數。

12. 設 a,b 爲二互質的正整數, 試證: $a+b$ 與 a^2+b^2 的最大公因數爲 1 或 2.

13. 設 a,b 爲二正整數, 若 $ab+1$ 能整除 a^2+b^2, 試證: $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 必爲某整數的完全平方。

14. 試找出所有正整數 a 使得 a 恰好等於它的所有數字的三次方的和, 例如 $1=1^3, 153=1^3+5^3+3^3$, 370, 371, 407 等, 是否還有其它解? (Open Problem)