

So Beautiful,

So powerful

— 數學的力與美

April, 2003

Part I

分析：微積分 / 古典物理學

代數：求解多項式的零根 / 群
論 / 對稱性與物理

幾何：非歐幾何 / 相對論

Part II

幾何/拓撲：微分幾何/規範場
代數幾何/弦論

代數：數論, 代數幾何/
編碼學, 密碼學

* 分析：編微程, 動態系統,
演算/計算法

美：

波士顿区：哈佛，MIT，……

普林斯顿：普林斯顿大学与研究院

帕克莱：帕克莱，数学科学研究中心
(MSRI)

欧洲：

剑桥：剑桥大学，牛领数学科学研究中心

巴黎：I.H.E.S.，巴黎大学

波昂：潘朗克数学中心

數學的“諾貝爾獎” —

費爾茲獎 (四年一次)

丘成桐 — 1982, 幾何.

(姚鴻澤 — 1998 提名, 數學物理)

數學的“終至成就”獎 —

渥爾夫獎
Wolf

陳省身 — 幾何.

中文
...

數學家中的“英雄”：

阿基米德, 歐拉, 高斯, 牛頓

伽羅瓦 (Galois), 黎曼 (Riemann),

潘加略 (Poincaré)

希爾伯特 (Hilbert),

韋爾 (Weyl)

Grothendieck

⋮

哲人日已遠
典型在國普

~ 文天祥
「正氣歌」

分析：微積分，微分方程，
偏微分方程 (P.D.E.)，
變分學，泛函分析，
機率論，數學物理，……

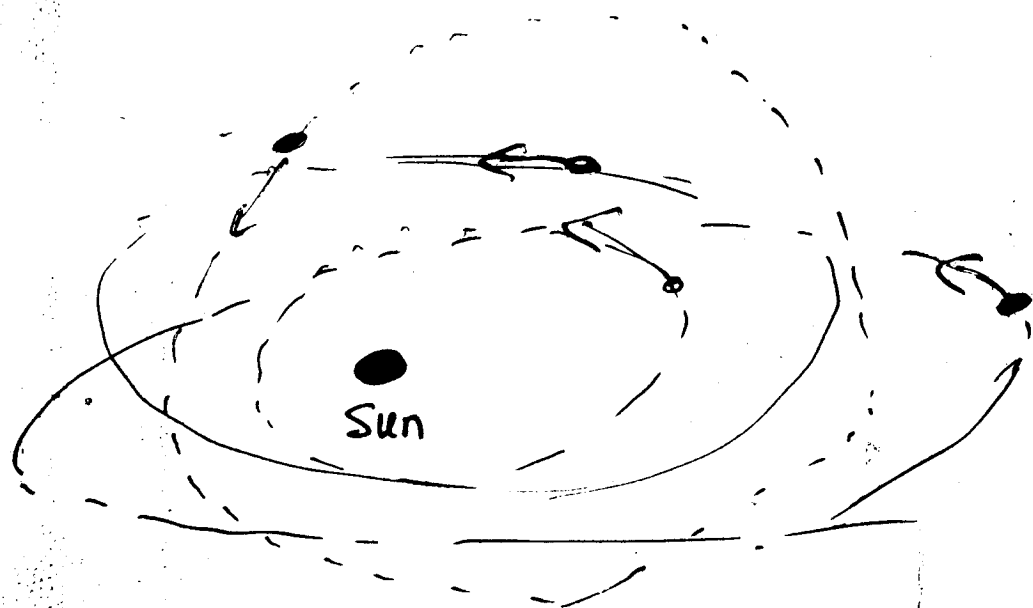
微積分：

—— 牛頓

萊布尼茲

1744 中

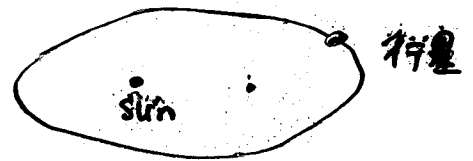
行星運動



行星運動問題

克卜勒三大運動定律 (實驗/歸納)

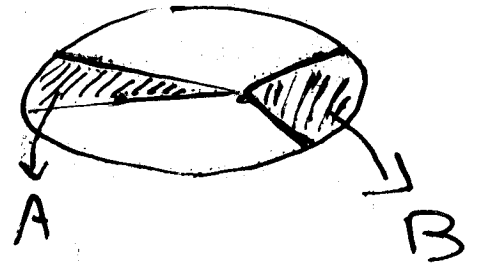
● 橢圓軌道：



● 等面積律：

相同時間內

$$\Rightarrow A = B$$



● 週期 vs. 距離律：

$$T^2/a^3 = \text{常數}$$

T: 週期

a: 長軸長

Q:

克卜勒的行星運動定律，
能有合理的解釋嗎？

- “萬有引力”定律：= 物體之引力
大小， \propto 質量成正比， \propto 相隔距離的平方成反比

≥ 1612 A.D.

- 微積分：求速度，加速度，
曲線長度，切線，
兩個物體之接觸，……

$\sin x$

正弦函数

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

幂级数

但,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

代入 $x=1$

$$\Rightarrow \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \dots$$

18th - 19th : 後微積分世紀

微分程, 偏微程,

變分學, 向量分析,

微分幾何, 複變函數...

數學物理

物理

19th — 電磁學,

統計力學

2. 代数学: 群论, 数论, 算数几何, 代数几何, 群表示论, ...

公式解多项式的根:

二次: $x^2 + bx + c = 0, \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

三次: $x^3 + bx + c = 0, \Rightarrow r_1 = \left[\frac{1}{2} \left(-c + \sqrt{c^2 + \frac{4b^3}{27}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{1}{2} \left(-c - \sqrt{c^2 + \frac{4b^3}{27}} \right) \right]^{\frac{1}{3}},$
 r_2, r_3 省略

四次: $x^4 + \dots = 0,$

Ferrari's (16th.)

五次以上呢?

何謂“公式”？ 可只用 $+$, $-$, \times , \div 以及
及根式 $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, ...
等混合表達的算式。

五次以上多項式根的公式解

17th - 18th

{ Lagrange (拉格朗日)
 歐拉

嘗試，未成功

~~~~~> 可能 不存在。

這樣的公式??

19th.

Abel

(1802-1829)

伽羅華

(1811-1832)

## 群論的誕生

- 五次以上根的“公式”不存在
- 群論  $\Rightarrow$  “特殊的”多項式  
(5次以上)的根  
才有代數式的表法  
 $+, -, \times, \div, \sqrt{\quad} \dots$

伽羅華群

群論 ~ 描述

“對稱性”

的數學語言

高能/粒子物理上

“基本粒子的分類”

“夸克模型”

“統一場論”

;

etc.

群 / 群表示論

Group  
Theory

Group Representation  
-theory



# 費馬最後定理

FLT

Fermat Last Theorem

FLT:  
(17th, 上)

$$x^n + y^n = z^n,$$

無整數解,  $\forall n \geq 3,$   
 $n \in \mathbb{N}.$

19th

Gauss: "孤立"的問題...

Gauss 可能試過  $n=7$ ,  
但未能解出.

19th.

FLT  $\rightsquigarrow$

{ Kummer  
Dedekind  
Kronecker

代數數論

20th, 21th —

算術幾何

可能是最高深的數學 (之一)

3.

幾何 / 拓撲 : 微分幾何, 黎曼幾何  
代數拓撲, 代數幾何  
.....

非歐幾何 + 近代幾何

歐幾里得幾何 (~ 300 B.C.)

五大公設

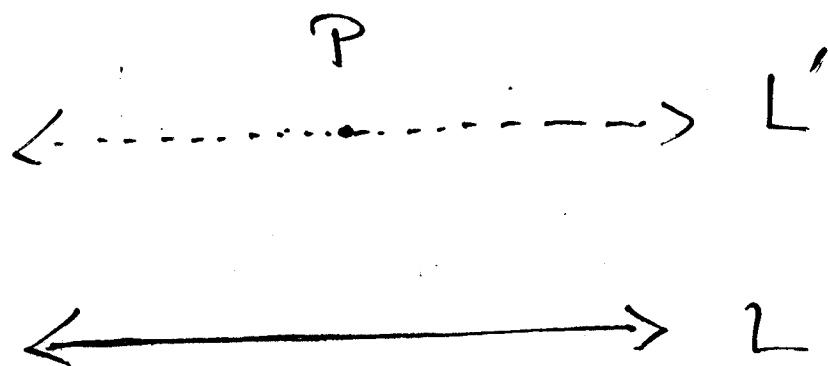
- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

平行公設:

給定:

• P





則  $\exists!$  (恰存在唯一)

的直線  $L' \ni P$ ,

且  $L' \neq L$  平行。

Q:

- 平行公設看起來並不像

$$1+1=2$$

那麼 trivial!?

- 可以“證明”它嗎? (只用其他四個公設)

# "證明" 平行公設

紀元前

Ptolemy

紀元後

Nasir-Eddin (13th)

Proclus (15th)

Wallis (17th)

Henn (18th)

Saccheri (17th)

~~1763~~

1763

G. Klügel

對平行公設之可證性

產生懷疑.....

+ Lambert, Schweikart, Taurinus

● 平行公設應該是不可被證明的!

● Gauss 1799  
1817

物理世界不必然是歐氏幾何的

... 進一步的確定, 則有賴於  
對物理空間更進一步的發現...

註: Gauss 當然無法想像,  
原來“時間”也應該  
是所謂“物理空間”的  
一部份, 而非獨立開來的。

Space-time 的問題 —

相對論

# 非歐幾何學

{ Lobatchevsky (1825, 26)  
Bolya

不再堅持採用平行公設

● 新世界 (= 非歐幾何)  
來臨？

.....

{ Gauss  
Riemann

- 微積分 + 幾何
- “彎曲空間”的數學描述?
- 高斯曲率



推廣至三度空間以上

黎曼幾何學

Riemannian Geometry

張量分析 (tensor analysis)

⋮

微分流形

manifolds



# 時-空幾何

## 狹義相對論

(潘伽略) Poincaré  
Lorentz 1904

Einstein 1905

## (G.R.) 廣義相對論 1916

物質能的分佈

↳

時空的幾何 (彎曲性)

數學方程式 = Einstein 方程式

丘成桐 證明 "正質量猜想"  
R. Schoen

用了微分幾何 "極小曲面論"  
的技巧.....

# Part V

數學與當代科學

幾何 / 微分拓撲

20th 的革命 ...

量子物理 Q.M.

相對論 G.R.

+

規範場論 GFT

(韋爾, 楊振寧...)

數學

Q.M.

泛函分析

G.P.

44.0.1.1

GAT

微分拓撲

19th

電學  
磁學

> 電磁理論 (法拉第)

數學化



馬克士威爾 程式

Maxwell

.....

四大基本力

重力

強交互作用力

弱交互作用力

電磁力

Q:

"統一場"論?

1967

電磁理論  
弱交互作用 > "電弱理論"

.....

Q: 何以統一?

"規範對稱"

1918-1919

韋爾 (Weyl)

1954

楊振寧 - Mills



物理程式的形式不變,

即使選擇不同的座標來表達

例：

$\vec{v}$  是某向量

現選取直角座標系  $S_1, S_2$

相對於  $S_1$

$$\vec{v} = (x_1, x_2)_{S_1}$$

相對於  $S_2$

$$\vec{v} = (y_1, y_2)_{S_2}$$

但，

$\vec{v}$  的長度 (的平方)

$$= x_1^2 + x_2^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2$$

也就是說：

$$\vec{v} = (0, 0)$$

$$\vec{v} = (\cdot, \cdot)$$

則  $\vec{v}$  的長度 (的平方)

$$= \cdot^2 + \cdot^2$$

此長度公式的表達

與 直角座標系的選用

無關

反之, 若知某公式的表達,

是無關乎座標系的選取,

則“公式”亦, 離上式不遠

結論：

利用 直角座標系轉換的不變性

推導出

長度平方的公式

類比：

韋爾 (Weyl) 1918-1919

利用一種

◎ 新的幾何轉換的不變性

試圖推導出

電磁理論

上述 ◎, 韋爾 取名為

規範不變性  
• • • • •

推廣



電磁以外的規範理論

楊振寧 - Mills (1954)



Yang-Mills 程式

(二次諾貝爾獎?)

微分拓撲.....

解

Yang-Mills 程

的重要數學工具之一

" Atiyah-Singer Index  
Theorem "



# Index Theorem 的基礎

纖維叢 (fiber bundle)

特徵類 (characteristic class)

—— 陳省身 (S.S. Chern)

- 楊振寧詩云 (1983)

.....  
造物變襲何  
力纖維能  
.....

- 為文章 (1983)

"..... 我在1975年懂此奧妙後，  
真有嘆為觀止之感....."

弦論 (string theory)

→ 大-統理論 ??

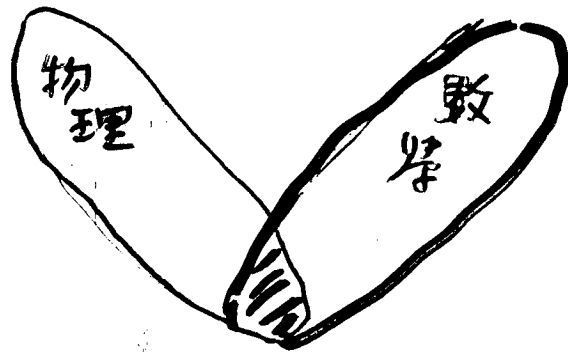
代數幾何, P.D.E

"非交換"幾何 .....

楊振寧  
陳省身

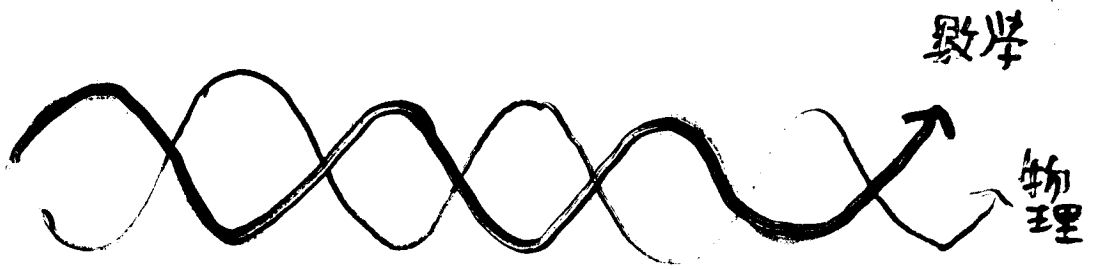
# 談數學與物理....

楊：



基礎一致  
各自發展

陳：



“ 命久必合  
合久必命 ”

“ 你中有我  
我中有你 ”

# 數論, 代數幾何 / 編碼學

"樣本空間"

$$\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$$

重新編碼

- 取  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$

- $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

- $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow x$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  代  $\lambda$

$$(a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_1 + a_3, a_1 \alpha_2^2 + a_2 \alpha_2 + a_3, a_1 \alpha_3^2 + a_2 \alpha_3 + a_3)$$

例如:  $\alpha_1=1, \alpha_2=2, \alpha_3=3$

$$(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_1 + a_2 + a_3, 4a_1 + 2a_2 + a_3,$$

$$9a_1 + 3a_2 + a_3)$$

代數運算：+，-， $\times$ ， $\div$

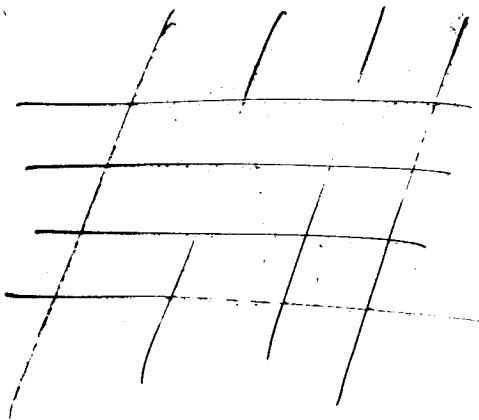
- 多項式經過代數運算後，

多項式  $\xrightarrow{+,-,\times,\div}$  有理式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, x \in \mathbb{C}$$

↓  
複數  
 $\{a+bi\}$

圖示：



$\mathbb{C}$ -平面

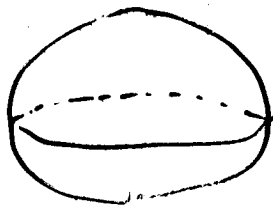
$$\frac{P(x)}{Q(x)}, x \in \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$  上的有理函數

# 現在推廣 $\mathbb{C}$ -平面

$\mathbb{C}$ -平面  $\rightsquigarrow$  其它彎曲曲面

例:

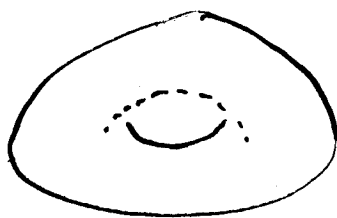


球面

$genus = 0$



虧格



torus

$genus = 1$



$genus \geq 2$

這些是所謂的

黎曼面 (Riemann  
Surfaces)

19th

# 編碼

- 研究黎曼面上的  
“有理函數”  
“有理式”

●● 用黎曼面上的有理式  
代替之前的多項式來編碼

●●● “Weil conjectures” 類型定理  
的應用

→ 理論上的最佳方法 (解決編碼問題)

算術幾何

代數幾何

相隔/年

引入的數學

0

牛頓力學

微積分

?

Maxwell 方程

向量分析

50

相對論

黎曼幾何

20

量子力學

泛函分析, 算子論

20

規範場

微分拓撲

≥100

弦論

代數幾何/非交換  
幾何

⋮

≥100

編碼/密碼

數論, 代數幾何

⋮

≥100

● "量子混沌"

Riemann Hypothesis

黎曼假說



• 科學的數學化？

• 數學  $\rightsquigarrow$

數學科學？

• • • •  
mathematical

Science

• 統計, 理論電腦,

離散數學, 計算數學,

應用數學, etc.

都云作者癡  
誰解其中味

~ 曹雪芹

何“癡”來哉？

為了藝術，為了愛

普契尼

歌劇「托斯卡」

數學家答云：

為了美，

為了真理，

為了永恆。