**問題**: (IMO 1988 Problem 6)

設 $a$ 及 $b$ 爲正整數且 $a^2+b^2$ 能被 $ab+1$ 整除, 試證 $(a^2+b^2)/(ab+1)$ 是一個完全平方數。

**略解**:

(i) 先猜一下怎麼做。

若 $(a,b)=(d,d^3)$, 則 $(a^2+b^2)/(ab+1)=d^2$; 若 $(a,b)=(d^3,d^5-d)$, 則 $(a^2+b^2)/(ab+1)=d^2$。而這是我們想要的線索。例如若取 $a_1=2, b_1=8, a_{n+1}=b_n, b_{n+1}=4b_n-a_n$, 則我們都有

$$a_n^2+b_n^2=4(a_nb_n+1)$$

(ii) 再正式做。

設 $a,b,k$ 是一組解, 滿足 $a^2+b^2=k(ab+1)$。若 $a=b$, 則有 $2a^2=k(a^2+1)$. 故 $a^2$ 是 $k$ 的因子。但這又導出 $a=b=k=1$。故且讓我們別管這樣的無趣解, 而假設 $a<b$。

我們先證明 $a^3>b$。因爲

$$\left(\frac{b-1}{a}\right)(ab+1)=b^2+\frac{b}{a}-b-\frac{1}{a}<b^2<a^2+b^2,$$

故得

$$k>\frac{b-1}{a}. \tag{1}$$

如果 $a^3<b$, 則

$$\frac{b}{a}(ab+1)>b^2+a^2,$$

所以

$$k<\frac{b}{a}. \tag{2}$$

但是現在由 (1) (2) 知道 $b>ak$ 及 $<ak+1$ 同時發生, 而這是矛盾。故知 $a^3>b$ 且同時得到

$$k\geq\frac{b}{a}. \tag{3}$$

因 $a<b$, 故知

$$a^2+b^2<ab+b^2<ab+b^2+1+b/a=(ab+1)\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

因此 $k<1+b/a$, 而

$$ka-b<a. \tag{4}$$

由 (4) 知道, 若有 $a, b, k$ 滿足

$$a^2 + b^2 = k(ab + 1)$$

則可定義 $a_0 = a, b_0 = b$ , 對於一般的 $n$ , 定義

$$b_{n+1} = a_n, \quad a_{n+1} = ka_n - b_n$$

則由 (4) , 知道 $a_n \geq 0$ 都是整數且嚴格遞減。同時

$$a_n^2 + b_n^2 = k(a_n b_n + 1) \tag{5}$$

總是成立。故存在一個 $m > 0$ 使得 $a_m = 0$ 。將之代入 (5) , 得 $k = b_m^2$ 。注意到這個 $k$ 值從未改變過, 因此這也是滿足

$$a^2 + b^2 = k(ab + 1)$$

的同一個 $k$ 值。它是一個完全平方數。