2003 基礎組合

朱亮儒

國立臺灣師範大學數學系

計數原理是依據加法原理與乘法原理來處理計數問題的一種法則,其主要的研究內容是如何運用恆等式,遞迴式,Fubini交換性質與生成函數來解決一些組合問題.例如:

1. 將r個不同物分配到n個不同盒子中的分配法有n^r種.

2. 將r個不同物分配到n個不同盒子中(盒子不可以是空的)的分配法有$n!S_2(r,n)$種.

3. 將r個不同物分配到n個相同盒子中的分配法有$S_2(r,1)+S_2(r,2)+\cdots+S_2(r,n)$種.

4. 將r個不同物分配到n個相同盒子中(盒子不可以是空的)的分配法有$S_2(r,n)$種.

5. 將r個相同物分配到n個不同盒子中的分配法有C_r^{n+r-1}種.

6. 將r個相同物分配到n個不同盒子中(盒子不可以是空的)的分配法有C_{n-1}^{r-1}種.

7. 將r個相同物分配到n個相同盒子中的分配法有$P(r,1)+P(r,2)+\cdots+P(r,n)$種.

8. 將r個相同物分配到n個相同盒子中(盒子不可以是空的)的分配法有$P(r,n)$種.

其中$P(r,n)$表示將正整數r恰分割成n部分的分割數,而$S_2(r,n)$表示第二類的Stirling數:將集合$\{1,2,\cdots,r\}$分割成n個非空子集的方法數.著名的Bell數B_r表示將集合$\{1,2,\cdots,r\}$分割成任意個非空子集的方法數.則有

$$B_r=\sum_{k=1}^{r}S_2(r,k)=\frac{1}{e}\left(1^{r-1}+\frac{2^{r-1}}{1!}+\frac{3^{r-1}}{2!}+\frac{4^{r-1}}{3!}+\cdots\right).$$

組合數學中,最著名的三種數列為Fibonacci數列, Catalan數列及Stirling數列.

I. Fibonacci數

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+2}=f_n+f_{n+1},\ \forall\ n=1,2,3,\cdots.$$

1. 假設年初有雌雄兩隻小兔子,第一個月長大,第二個月後每個月都可以繁殖雌雄各一的小兔一對;而生下的每一對小兔子過兩個月後也可以每月繼續繁殖雌雄各一的小兔一對.設第n個月時共有a_n對兔子,則$a_n=f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$. (Binet公式)

2. 用n個1×2尺寸的骨牌來覆蓋一$2\times n$尺寸的棋盤，假設共有b_n種不同的覆蓋方式，則$b_n=f_{n+1}$.

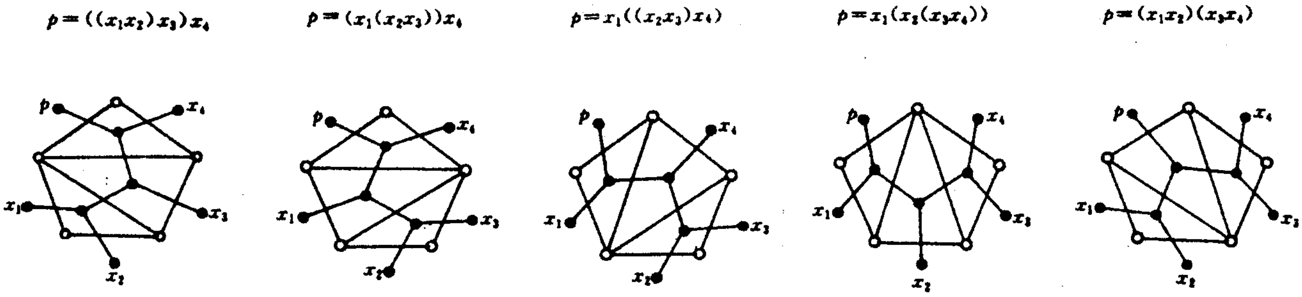
3. 用$0,1$組成的n位數二元字串中，設不出現兩相鄰的1之字串的個數爲c_n，則$c_n=f_{n+2}$.

II. Catalan 數

$$C_1=1, C_2=2, C_3=5, C_4=14,\ C_n=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_0.$$

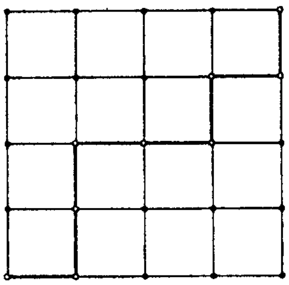
1. 設a_n表示對於凸$n+2$邊形，用不相交(除端點外)的$n-1$條對角線分割成n個三角形之分割方法數，則$a_n=C_n$.

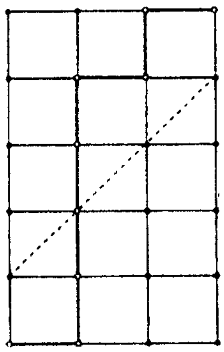
2. 設b_n表示將運算式$x_1*x_2*\cdots*x_n$中加入括號以區分連續兩項的運算次序(parenthesize)之方法數，則$b_n=C_{n-1}$.



3. 從一$n\times n$的棋盤的左下角沿水平向右或鉛直向上到達右上角的路線中，行進路線不超越45^o對角線上方的可能路線之個數，以c_n表示，則$c_n=C_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$.

證明: 由棋盤的左下角依向右或向上移動而到達點(n,n)的路線共有C_n^{2n}種. 將其中滿足本問題的路線稱爲好路線(有C_n條好路線)，而其他的路線稱爲壞路線(設有B_n條壞路線)，則$C_n^{2n}=C_n+B_n$. 易知每一$n\times n$格子棋盤上的壞路線與$(n+1)\times(n-1)$格子棋盤上的路線有一對一的對應關係(例如: 將一條壞路線在第一次超越對角線$y=x$後，原路線若向右則改成向上，若向上則改成向右; 如此即可得到一對應在$(n+1)\times(n-1)$格子棋盤上的一條路線).





因爲由$(n+1)\times(n-1)$格子棋盤的左下角向右或向上到達右上角的路線數是C_{n-1}^{2n}. 故$B_n=C_{n-1}^{2n}$. 如此,

$$C_n=C_n^{2n}-B_n=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}.$$

III. Stirling 數

1. 第一類Stirling數$S_1(n,k)$表示n個人分配到k張圓桌子圍繞而坐,每一張桌子至少一人,但不考慮桌子的排列次序,之方法數,例如: $S_1(n,n)=1, S_1(n,1)=(n-1)!$,則$S_1(n,k)$的遞迴式爲

$$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)+n\cdot S_1(n,k).$$

利用已知的圓形排列數$S_1(n,1)=(n-1)!$,可求得$S_1(n,2)$. 事實上,

$$S_1(n+1,2)=S_1(n,1)+n\cdot S_1(n,2)=(n-1)!+n\cdot S_1(n,2).$$

若令$a_n=S_1(n,2)$,則上式可改寫成$a_{n+1}=(n-1)!+n\cdot a_n$. 由迭代法及初始值條件$a_1=0$可推得

$$S_1(n,2)=a_n=(n-1)!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}),\ \forall\, n\geq 2.$$

2. 第二類Stirling數$S_2(n,k)$表示將n個元素的集合分割成k個非空子集的方法數,例如: $S_2(n,n)=1, S_2(n,1)=1$,則$S_2(n,k)$的遞迴式爲

$$S_2(n+1,k)=S_2(n,k-1)+k\cdot S_2(n,k).$$

在組合數學中, Stirling數的發現者J. Stirling (1692-1770)也是生成函數的開拓者. 他將第一類Stirling數看成降階乘函數

$$[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),\ 其中\ [x]_0=1$$

以$\{1,x,x^2,\cdots\}$爲基底的冪級數表出的係數;換句話說,

$$[x]_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n,k)x^k.$$

其係數$S_1(n,k)$稱爲第一類Stirling數. 規定$S_1(n,k)=0,\forall\, k>n$,則$[x]_n$爲$S_1(n,k)$的生成函數(此處數列對k而言). 事實上, $S_1(n,0)=0, S_1(n,1)=(-1)^{n-1}(n-1)!, S_1(n,n)=1$, 且滿足以下的遞迴關係(注意:不同於前面的遞迴式):

$$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)-n\cdot S_1(n,k).$$

與集合分割問題有關的第二類Stirling數$S_2(n,k)$是將x^n以$\{[x]_0,[x]_1,[x]_2,\cdots\}$爲基底的表現式;其定義如下:

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)[x]_n.$$

其中係數$S_2(n,k)$稱爲第二類Stirling數.規定$S_2(0,0)=1, S_2(n,k)=0,\ \forall\ k>n$,則$S_2(n,k)$也有很好的組合意義,它可表示將集合$\{1,2,3,\cdots,n\}$分割成$k$個互不相交的非空子集合之方法數,例如: $S_2(n,0)=0, S_2(n,1)=S_2(n,n)=1$,且滿足以下的遞迴關係:

$$S_2(n+1,k)=S_2(n,k-1)+k\cdot S_2(n,k).$$

由此遞迴式我們可求得$S_2(n,2)$.事實上,由已知$S_2(n,1)=1$,可得

$$S_2(n+1,2)=S_2(n,1)+2\cdot S_2(n,2)=1+2\cdot S_2(n,2).$$

若令$a_n=S_2(n,2)$,則上式可改寫成$a_{n+1}=1+2\cdot a_n$.由迭代法及初始值條件$a_1=0$可推得

$$S_2(n,2)=a_n=2^{n-1}-1,\ \forall\ n\geq 2.$$

3. 設$f(n,k)$表示從數字$1,2,3,\cdots,n$中取出k個數字,但不得有連續數出現之方法數,則$f(n,k)$滿足遞迴式

$$f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k).$$

再由數學歸納法可證得: $f(n,k)=C_k^{n-k+1}$.另一方法是將取出k個數字集S對應一個二元字串$a_1a_2\cdots a_n$: $i\in S\iff a_i=1$,而$i\notin S\iff a_i=0$.因此,所求的方法數$f(n,k)$相當於$n-k$個0排成一列後,再從這些0的前後共$n-k+1$個空隙中取出k個位置來放入1而得.於是可得: $f(n,k)=C_k^{n-k+1}$.更進一步地,設$g(n)$表示從數字$1,2,3,\cdots,n$中取出任意個數字,但不得有連續數出現之方法數,則$g(n)$滿足遞迴式

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n} f(n,k)=g(n-1)+g(n-2),\ \forall\ n\geq 2.$$

[Kaplansky 定理]:設a_n表示的滿足下列條件的不同子集A之個數:

(i) $A\subset\{1,2,3,\cdots,n\}$;

(ii) A中不含有連續數,也不能同時包含1與n.

則

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}.$$

[證明]:設$f^*(n,k)$表示從數字$1,2,3,\cdots,n$中取出k個數字,但不得有連續數出現,也不能同時取出1與n之方法數,則

$$f^*(n,k)=f(n-3,k-1)+f(n-1,k).$$

又$f(n,k)=C_k^{n-k+1}$,而$f^*(n,k)=0,\ \forall\ k>\left[\frac{n+1}{2}\right]$,故

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}f^*(n,k)=1+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(C_{k-1}^{n-k+1}+C_k^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}.$$

注意: [不盡相異物的排列定理]將n個不盡相異物排成一列的排列數爲$\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!}$,其中$n=q_1+q_2+\cdots+q_t$,而這$n$個物品分成$t$類,第$k$類有$q_k$個相同物.於是可得:

[推論]:

$$q_1!q_2!\cdots q_t!\mid(q_1+q_2+\cdots+q_t)!\ .$$

[例題]: 試證:對每一正整數k, $(k!)^{(k-1)!}\mid(k!)!$.

[解答]:令$n=k!$,則$n=k\cdot(k-1)!=k+k+\cdots+k$.將$1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,3,3,\cdots,3,\cdots,(k-1)!,(k-1)!,\cdots,(k-1)!$共$n$個數排成一列,其中共有$(k-1)!$種不同的數,而每一個數各重複$k$次,其排列數爲

$$\frac{n!}{k!k!\cdots k!}=\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}\in N.$$

因此,$(k!)^{(k-1)!}$是$(k!)!$的因數.

[研究題]:試證:對每一正整數n,整數$(1!2!\cdots n!)^2$是$(n^2+n)!$的因數.

[研究題]:試證:對任意正整數m,n,整數$(n!)^m(m!)^n$是$((mn)!)^2$的因數.

組合恆等式是重要的技巧,例如: $C_k^n\cdot C_m^k=C_m^n\cdot C_{k-m}^{n-m}$,又如二項式定理: $(x+y)^n=\sum C_k^n x^k y^{n-k}$等都是要牢記的.

[例題]:(1998 APMO)設n爲正整數, F表示所有n重集合$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$構成的集合族,其中每一A_i都是$\{1,2,3,\cdots,1998\}$的子集合, $i=1,2,\cdots,n$,且設$|A|$表示集合A的元素個數.試求出下列級數和:

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

[解答]:若M是$\{1,2,3,\cdots,1998\}$的子集合,且$|M|=k$,則將M表成$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$的方法共有$(2^n-1)^k$種(因爲$M$的每一元素分配到$A_1,A_2,\cdots,A_n$的方法有$2^n-1$種).故

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{1998} \sum_{|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=k} k = \sum_{k=1}^{1998} k \cdot C_k^{1998} \cdot (2^n-1)^k.$$

再利用二項式定理化簡上式可得

$$= 1998(2^n-1)\sum_{k=0}^{1997} C_k^{1997} \cdot (2^n-1)^k = 1998(2^n-1)\left[(2^n-1)+1\right]^{1997} = 1998(2^n-1)2^{1997n}.$$

[研究題]：試證:

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 1998 \cdot 2^{1997n}.$$

我們知道: [圓形排列定理]將n個相異物排成一個環狀的排列數爲$(n-1)!$. 在下一主題中,我們將利用Möbius互逆定理導引出不盡相異物的圓形排列公式. 首先,我們給Möbius函數下一個定義:

Möbius 函數:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & \text{當 } n=1 \\ (-1)^k, & \text{當 } n = p_1p_2\cdots p_k \text{ 爲相異質數的乘積} \\ 0, & \text{當 } n \text{ 爲某一質數平方的倍數}. \end{cases}$$

現在,讓我們先看一些Möbius函數的性質及其在數論上的應用.

[基本性質]：任一大於1的正整數n的所有正因數之Möbius函數值的和必爲0.

[證明]：令n的質因數分解爲$n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$,則$n$的每一質因數也都是$n_1 = p_1p_2\cdots p_r$的質因數. 由於$n$的因數中含有平方因數的所有Möbius函數值之和顯然爲0,故

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{d|p_1p_2\cdots p_r}\mu(d) = \mu(1) + \sum_{i=1}^{k}\mu(p_i) + \sum_{1\le i<j\le r}\mu(p_ip_j) + \cdots + \mu(p_1p_2\cdots p_r)$$

$$= 1 + C_1^r(-1) + C_2^r(-1)^2 + \cdots + C_r^r(-1)^r = (1+(-1))^r = 0.$$

[Euler 定理]：Euler函數(不超過n且與n互質的正整數之個數)

$$\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}.$$

[證明]：令n的質因數分解爲$n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$,則

$$\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{d|p_1p_2\cdots p_r}\mu(d)\frac{n}{d}=\mu(1)\frac{n}{1}+\sum_{i=1}^{r}\mu(p_i)\frac{n}{p_i}+\sum_{i<j}\mu(p_ip_j)\frac{n}{p_ip_j}+\cdots$$

$$=n+(-1)\sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i}+(-1)^2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{n}{p_ip_j}+\cdots+(-1)^r\cdot\frac{n}{p_1p_2\cdots p_r}$$

$$=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})=\varphi(n).$$

[Fubini 交換定理]：

$$\sum_{d|n}\sum_{d'|\frac{n}{d}}f(d,d')=\sum_{d'|n}\sum_{d|\frac{n}{d'}}f(d,d').$$

[Möbius 互逆定理]：下列兩式是等價的:

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d),\ \forall\ n=1,2,3,\cdots, \tag{1}$$

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d}),\ \forall\ n=1,2,3,\cdots. \tag{2}$$

[證明]：假設(1)式對任一正整數n都成立.則對n的因數d, (1)式對正整數$\frac{n}{d}$也成立,即

$$f(\frac{n}{d})=\sum_{d'|\frac{n}{d}}g(d').$$

此處, d'是$\frac{n}{d}$的因數,故有$n=dd'm$.代入(2)式右邊的函數值,可得

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d'|\frac{n}{d}}g(d')=\sum_{d'|n}g(d')\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)=g(n).$$

上面等式的最後一個等號成立是因爲僅當$\frac{n}{d'}=1$時(即$d'=n$),

$$\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)=1,$$

而其餘均爲0.反之,由(2)式也同理可導出(1)式成立.事實上,

$$\sum_{d|n}g(d)=\sum_{d|n}g(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\sum_{d'|\frac{n}{d}}\mu(\frac{n}{dd'})f(d')$$

$$= \sum_{d'|n} \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(\frac{n}{dd'}) f(d') = \sum_{d'|n} \left(f(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(\frac{n}{dd'}) \right) = f(n).$$

[不限量可重複的圓形排列定理]：設$Q(m,n)$表示從m種相異物中，可重複的取出n個排成一圓圈的方法數．則

$$Q(m,n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) m^{\frac{n}{d}}.$$

[證明]：設$M(d)$表示其中以d爲最小週期的圓形排列之個數，則它們對應的直線排列數爲$d \cdot M(d)$. 例如：$m = 2, n = 12$, 圓形排列$a_1a_2a_2a_1a_2a_2a_1a_2a_2a_1a_2a_2$之最小週期$d = 3$, 此時從12個空隙中任一處剪開，可發現僅有3種不同的直線排列，亦即最小週期d的每一圓形排列恰可對應d個不同的直線排列．因最小週期d可以是n的任一正因數，故從m種相異物中，可重覆的取出n件物品排成一直線之方法數爲

$$m^n = \sum_{d|n} d \cdot M(d).$$

應用Möbius互逆定理可得

$$n \cdot M(n) = \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}.$$

即得函數M的表現式:

$$M(d) = \frac{1}{d} \sum_{d'|d} \mu(d') m^{\frac{d}{d'}}.$$

因此,

$$Q(m,n) = \sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{d'|d} \mu(d') m^{\frac{d}{d'}}.$$

令$k = \frac{d}{d'}$,則

$$Q(m,n) = \sum_{k|n} \sum_{d'|\frac{n}{k}} \frac{1}{kd'} \mu(d') m^k = \sum_{k|n} \frac{1}{k} m^k \cdot \frac{k}{n} \left(\frac{n}{k} \sum_{d'|\frac{n}{k}} \frac{1}{d'} \mu(d') \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k|n} m^k \cdot \varphi(\frac{n}{k}) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \cdot m^{\frac{n}{d}}.$$

有興趣的讀者可進一步地研究以下更一般性的m元Möbius變換互逆定理與應用．

[m元Möbius互逆定理]：設n表示$n_1, n_2, \cdots, n_m$的最大公因數．下列兩式是等價的:

$$f(n_1, n_2, \cdots, n_m) = \sum_{d|n} g(\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \cdots, \frac{n_m}{d}), \tag{1}$$

$$g(n_1,n_2,\cdots,n_m)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n_1}{d},\frac{n_2}{d},\cdots,\frac{n_m}{d}). \tag{2}$$

注意:將n個物品,其中第k種物品有n_k個,$n=n_1+n_2+\cdots+n_m$,排成一直線的方法數爲

$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

若將這n個物品排成一圓形,設其週期爲d,而$d'=\frac{n}{d}$,則週期數d'必爲每一種物品數n_k的因數,且每一週期內分別含有第k種物品$\frac{n_k}{d'}$個.設週期爲d的圓形排列數爲

$$M\left(\frac{n_1}{d'},\frac{n_2}{d'},\cdots,\frac{n_m}{d'}\right),$$

則由週期爲d的圓形排列恰可對應$d=\frac{n}{d'}$個不同的直線排列,可知所有的直線排列數

$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)=\sum_{d'|(n_1,n_2,\cdots,n_m)}\frac{n}{d'}M\left(\frac{n_1}{d'},\frac{n_2}{d'},\cdots,\frac{n_m}{d'}\right),$$

而所有的圓形排列數爲

$$R(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)=\sum_{d'|(n_1,n_2,\cdots,n_m)}M\left(\frac{n_1}{d'},\frac{n_2}{d'},\cdots,\frac{n_m}{d'}\right).$$

再利用[m元Möbius互逆定理],即可導出以下公式:

[限量可重複的圓形排列定理]:設$R(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)$表示從m種相異物中,可重複的取出n個(其中第k種物品取出n_k個,$n=n_1+n_2+\cdots+n_m$)排成一圓圈的方法數.則

$$R(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)=\frac{1}{n}\sum_{d|(n_1,n_2,\cdots,n_m)}\varphi(d)\frac{(\frac{n}{d})!}{(\frac{n_1}{d})!(\frac{n_2}{d})!\cdots(\frac{n_m}{d})!}.$$

[推論]:

$$Q(m,n)=\sum_{n=n_1+n_2+\cdots+n_m}R(n;n_1,n_2,\cdots,n_m).$$