洪有情
92.3.28

# 高斯函數$[x]$

$[x]$：= 不超過$x$的最大整數

$\{x\}$：= $x-[x]$

一 $[x]$和$\{x\}$的性質：

(1) $x-1<[x]\le x$，$[x]$爲整數。

$0\le\{x\}<1$

(2) $n\le x$，則 $n\le[x]$，這裡$n$是整數。

(3) $n>x$，則 $n\ge[x]+1>[x]$，這裡$n$是整數。

(4) $x\le y$，則 $[x]\le[y]$。

(5) 若 $x=n+\theta$，其中 $0\le\theta<1$，$n$是整數，則 $[x]=n$。

(6) $[x]+[y]\le[x+y]$

(7) $[x+n]=[x]+n\Leftrightarrow n$是整數。

(8) $\{x+n\}=\{x\}\Leftrightarrow n$是整數。

(9) 若 $x\ge 0$，$y\ge 0$，則 $[xy]\ge[x][y]$。

(10) $0\le[2x]-2[x]\le 1$，即 $[2x]-2[x]=0$或$1$。

(11) $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right]$，這裡$x$是實數，$n$是正整數。

(12) 設$x$、$y$、$q$、$r$都是整數，$y\ne 0$，$0\le r<y$，則 $q=\left[\dfrac{x}{y}\right]$。

$x=qy+r$

二 與$[x]$有關的因數、倍數問題：

1. 設$n$是正整數，$p$是質數，則$n!$展開後含$p$的乘冪數爲 $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^i}\right]$。

2. 設$n$是正整數，$p$是質數且 $n=a_0+a_1p+\cdots+a_rp^r$，其中 $a_r\ne 0$且

   $0\le a_i<p$，對於每個$a_i$，若$n!$展開後含$p$的乘冪數爲$e$，則

   $e=\dfrac{n-(a_0+a_1+\cdots+a_r)}{p-1}$。

3. 設$m$、$n$都是正整數，則 $\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$也是正整數。

4. 設$n$是正整數，則 $(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)$是$2^n$的倍數。

5. 設$n$是正整數，則 1，2，⋯，$2n$的最小公倍數必能被$C_n^{2n}$整除。

三 含$[x]$的等式：

1. 設$x$是實數，$n$是正整數，則 $[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$。

2. 設$x\geq 0$，則 $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$。

3. 設$n$爲正整數，則 $[\ \sqrt{n}+\sqrt{n+1}\ ]=[\ \sqrt{4n+1}\ ]=[\ \sqrt{4n+2}\ ]=[\ \sqrt{4n+3}\ ]$。

四 含$[x]$的不等式：

證明含$[x]$的不等式時，通常

(1) 把問題弄到( 0,1 )來討論。

(2) 把( 0,1 )分段考慮，具體的分法則因題目而異。

(3) 歸納法或其他方法。

1. 証明 $[nx]\geq\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$，此處$x$爲實數，$n$爲正整數。

2. 証明 $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$，其中$x$、$y$爲實數。

五 含$[x]$的方程式：

1. 求方程式 $3x^3-[x]=3$的實數解。

2. 設$n$是正整數，方程式 $x^2-[x^2]=(x-[x])^2$在 $[\ 1,n\ ]$中有多少解？

六 其他例題：

1. 設$d(n)$表示$n$的正因數個數，

   則 $d(1)+d(2)+\cdots+d(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]$。

2. 數列 $\{[\sqrt{2}n]\}_{n=1}^{\infty}$含有無窮多個完全平方數。

3. 設 $a_n=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$，$n=1,2,3,\cdots$，且設$A=\{a_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$，試說明A是由那些整數所組成的集合。

## 習題

1. 計算 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n^2-1}]$。

2. 求 $[(\sqrt{29}+\sqrt{21})]^{88}$ 的末兩位數字。

3. 求 $4x^2-40[x]+51=0$ 的全部實根。

4. 解不等式 $[x]\{x\}<x-1$。

5. (a) 什麼條件下，$[x]+[x]=[2x]$？

   (b) 什麼條件下，$[x]+[-x]\neq 0$？

6. 證明 $-[-x]$ 是不小於 $x$ 的最小整數。

7. (a) 證明沒有其他整數會比 $[x+\frac{1}{2}]$ 更接近 $x$。

   (b) 若兩個整數同樣最接近 $x$，證明這兩個整數中比較大的數是 $[x+\frac{1}{2}]$。

8. 證明方程式 $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ 無實數解。

解答

二

1. 1 到$n$這些正整數中能被$p$整除有 $p,2p,\cdots,\left[\frac{n}{p}\right]p$，共 $\left[\frac{n}{p}\right]$個，

1 到$n$這些正整數中能被$p^2$整除有 $p^2,2p^2,\cdots,\left[\frac{n}{p^2}\right]p$，共 $\left[\frac{n}{p^2}\right]$個，

$$\vdots$$

因此，若 $n!=p^k m$，其中 $p\nmid m$，則 $k=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^i}\right]+\cdots$。

2. $n=a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_rp^r$，其中$0\le a_i<p$ ,

則 $\left[\frac{n}{p}\right]=a_1+a_2p+\cdots+a_rp^{r-1}$

$$\left[\frac{n}{p^2}\right]=a_2+a_3p+\cdots+a_rp^{r-2}$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{n}{p^{r-1}}\right]=a_{r-1}+a_rp$$

$$\left[\frac{n}{p^r}\right]=a_r$$

因此 $a_0+p\left[\frac{n}{p}\right]=n$

$$a_1+p\left[\frac{n}{p^2}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]$$

$$a_2+p\left[\frac{n}{p^3}\right]=\left[\frac{n}{p^2}\right]$$

$$\vdots$$

$$a_{r-1}+p\left[\frac{n}{p^r}\right]=\left[\frac{n}{p^{r-1}}\right]$$

$$+)\qquad a_r=\left[\frac{n}{p^r}\right]$$

---

$$(a_0+a_1+\cdots+a_{r-1}+a_r)+p\underbrace{\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^r}\right]\right)}_{\parallel \atop e}=n+\underbrace{\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^r}\right]\right)}_{\parallel \atop e}$$

所以 $e=\dfrac{n-(a_0+a_1+\cdots+a_r)}{p-1}$

3. 設 $(m+n)!=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ ，$m!=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_r^{b_r}$ ，$n!=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_r^{c_r}$ ，其中 $p_i$ 都是 相異 質數，$a_i,b_i,c_i$ 都是正整數或 0，只要證明 $a_i\ge b_i+c_i$ 即可 $\forall i$ ，

但 $a_i=\left[\dfrac{m+n}{p_i}\right]+\left[\dfrac{m+n}{p_i^{\,2}}\right]+\cdots$

$$\begin{aligned}
&\ge\left[\frac{m}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{m}{p_i^{\,2}}\right]+\left[\frac{n}{p_i^{\,2}}\right]+\cdots\\
&=\left(\left[\frac{m}{p_i}\right]+\left[\frac{m}{p_i^{\,2}}\right]+\cdots\right)+\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i^{\,2}}\right]+\cdots\right)\\
&=b_i+c_i
\end{aligned}$$

4. $(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)=\dfrac{(2n)!}{n!}$ ，

$(2n)!$展開後，2 的乘冪數爲 $\left[\dfrac{2n}{2}\right]+\left[\dfrac{2n}{2^2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{2n}{2^i}\right]+\cdots$

$$=[n]+\underbrace{\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]+\cdots}$$

$$=n+(n!\text{展開後2的乘冪數})$$

5. $C_n^{2n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$ ，設 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是不大於$2n$的所有質數，

同 #3， $C_n^{2n}$ 展開後 $p_i$ 的乘冪數爲 $\displaystyle\sum_{t=1}^{d_i}\left(\left[\frac{2n}{p_i^{\,t}}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^{\,t}}\right]\right)$，其中 $d_i$ 是適合

$p_i^{\,s}\le 2n$ 的整數 $s$ 中最大者。

$lcm(1,2,\cdots,2n)=m$ ，則 $m=p_1^{d_1}p_2^{d_2}\cdots p_r^{d_r}$

$\because\ \left[\dfrac{2n}{p_i^t}\right]-2\left[\dfrac{n}{p_i^t}\right]=0$ 或 1

$\therefore\ \displaystyle\sum_{t=1}^{d_i}\left(\left[\dfrac{2n}{p_i^t}\right]-2\left[\dfrac{n}{p_i^t}\right]\right)\le d_i \qquad \forall i$

三

1. 設 $x=[x]+\{x\}$ 代入原式，化簡後得 $[n\{x\}]=[\{x\}]+\left[\{x\}+\dfrac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\{x\}+\dfrac{n-1}{n}\right]$，

   而原式與上式是等價的，故可設 $0\le x<1$。

   將 $[0,1)$ 分成 $n$ 等分，設 $x\in[\ \dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\ )$，( $k=1,2,\cdots,n$ )，

   即 $k-1\le nx<k$，

   $\therefore\ [nx]=k-1$

   另一方面 $\dfrac{k-1}{n}\le x<\dfrac{k}{n}$

   $$\dfrac{k}{n}\le x+\dfrac{1}{n}<\dfrac{k+1}{n}$$

   $$\vdots$$

   $$\dfrac{k+n-2}{n}\le x+\dfrac{n-1}{n}<\dfrac{k+n-1}{n}$$

   不論 $k$ 是多少，$\dfrac{k}{n},\cdots,\dfrac{k+n-1}{n}$ 中必有一個是 1，設為 $\dfrac{k+t}{n}=1$，$\therefore\ t=n-k$

   因此 $\qquad [x]=\left[x+\dfrac{1}{n}\right]=\cdots=\left[x+\dfrac{n-k}{n}\right]=0$

   $$+)\quad \left[x+\dfrac{n-k+1}{n}\right]=\cdots=\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right]=1$$

   得 $\qquad\qquad =k-1$

2. 設 $\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]=n$

   即 $[x^{\frac{1}{4}}]=n$

   $\therefore\ n\le x^{\frac{1}{4}}<n+1$

   $\therefore\ n^2\le x^{\frac{1}{2}}<(n+1)^2$

$\Rightarrow\ n^2 \le [\sqrt{x}] < (n+1)^2$

$\Rightarrow\ n \le \sqrt{[\sqrt{x}]} < n+1$

$\Rightarrow\ \left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = n$

3. $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$

而 $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$

$\therefore\ 4n+1 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+3$

$\Rightarrow \sqrt{4n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3} \Rightarrow [\sqrt{4n+1}] \le [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \le [\sqrt{4n+3}]$

設 $[\sqrt{4n+1}] = m$

$\Rightarrow m \le \sqrt{4n+1} < m+1$

$\Rightarrow m^2 \le 4n+1 < (m+1)^2$

每一平方數被 4 除不可能餘 2 以及餘 3，

因此 $m^2 \le 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < (m+1)^2$

$\therefore\ m \le \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < m+1$

所以 $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}] = m$

四

1. 對 $n$ 作歸納法

令 $A_k = [x] + \dfrac{[2x]}{2} + \cdots + \dfrac{[kx]}{k}$ ，$k = 1,2,\cdots$

$k=1$ ，$A_1 = [x]$

設 $A_1 \le [x]$ ，$A_2 \le [2x]$ ，⋯ ，$A_{k-1} \le [(k-1)x]$ ，要證 $A_k \le [kx]$

$$kA_k - kA_{k-1} = k(A_k - A_{k-1}) = k\cdot\frac{[kx]}{k} = [kx]$$

$$(k-1)A_{k-1} - (k-1)A_{k-2} = [(k-1)x]$$

$$\vdots$$

$$2A_2 - 2A_1 = [2x]$$

$$+)\qquad A_1 = [x]$$

$$kA_k-(A_1+\cdots+A_{k-1})=[x]+[2x]+\cdots+[kx]$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow kA_k &= ([x]+[2x]+\cdots+[kx])+(A_1+\cdots+A_{k-1})\\ &\le ([x]+[2x]+\cdots+[kx])+([x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x])\\ &= ([x]+[(k-1)x])+([2x]+[(k-2)x])+\cdots+([(k-1)x]+[x])+[kx]\\ &\le \underbrace{([kx]+[kx]+\cdots+[kx])}_{(k-1)\text{個}[kx]}+[kx]\\ &= k[kx]\end{aligned}$$

2. 設 $x=[x]+\{x\}$ ， $y=[y]+\{y\}$ 代入原式得 $[2\{x\}]+[2\{y\}]\ge[\{x\}+\{y\}]$ ，
上式與原式等價，可設 $0\le x<1$ ， $0\le y<1$ ，
證明 $[2x]+[2y]\ge[x+y]$ 。 $\left([x+y]\le\max([2x],[2y])\le[2x]+[2y]\right)$

五

1. 設 $x=[x]+\{x\}$ ，則 $3x^3-x+\{x\}=3$ $\therefore$ $3x^3-x=3-\{x\}$
但 $2<3-\{x\}\le3$
$\therefore$ $2<3x^3-x\le3$
顯然 $x\ne0$ ，若 $x<0$ ，則因 $2<x(3x^2-1)$ 得 $3x^2-1<0$
$\Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<0$
$\Rightarrow \left|x(3x^2-1)\right|\le|x|\cdot(\left|3x^2\right|+1)<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1+1)<2$ $\rightarrow\leftarrow$
若 $0<x<1$ ，則 $3x^3-x=x(3x^2-1)<2$ $\rightarrow\leftarrow$
若 $x\ge2$ ，則 $3x^3-x=x(3x^2-1)>3$ $\rightarrow\leftarrow$
因此 $1\le x<2$ ， $[x]=1$ ，
原式爲 $3x^3=4$
得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$

2. $n$爲一解。設$x\in[1,n)$爲其一個解，則 $x^2=([x]+\{x\})^2=[x]^2+\{x\}^2+2[x]\{x\}$，
$[x^2]=[x]^2+[\{x\}^2+2[x]\{x\}]$，又 $(x-[x])^2=\{x\}^2$，
∴ 原式爲 $2[x]\{x\}=[\{x\}^2+2[x]\{x\}]$
∴ 原式有解 $\Leftrightarrow 2[x]\{x\}$爲整數
設 $[x]=m$，則 $\{x\}=\dfrac{l}{2m}$，其中 $l=0,1,2,\cdots,2m-1$，
在 $[m,m-1)$中，方程式有$2m$個解，但 $1\le m\le n-1$，
因此在 $[1,n)$中，方程式有 $2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)$，
所以方程式共有 $n(n-1)+1$個解。

六

1. 設$k$爲不大於$n$的正整數，則$1,2,3,\cdots,n$中能被$k$整除的有$k,2k,\cdots,\left[\dfrac{n}{k}\right]k$，共
$\left[\dfrac{n}{k}\right]$個，故$1,2,3,\cdots,n$的正因數的個數共 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$，
即 $d(1)+d(2)+\cdots+d(n)=\left[\dfrac{n}{1}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n}{n}\right]$。

2. 設$k$是正奇數，令 $(\sqrt{2}+1)^k=\sqrt{2}x_k+y_k$，$x_k,y_k$是正整數，

則 $(\sqrt{2}-1)^k=\sqrt{2}x_k-y_k$，相乘得 $2x_k^2=y_k^2+1$，

因此 $2(x_ky_k)^2=y_k^4+y_k^2$，

$$y_k^2<\sqrt{2}x_ky_k<y_k^2+1,$$

取 $n=x_ky_k$，則$[\sqrt{2}n]=[\sqrt{2}x_ky_k]=y_k^2$，這種$n$有無限多個。

3. $\sqrt{1}=1,1<\sqrt{2}<\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}<\sqrt{3}<2$，所以 $a_1=2,a_2=3,a_3=5$，更進一步可知
$a_4=6,a_5=7,a_6=8,a_7=10,a_8=11,\cdots$，因此$\{a_n\}$爲$2,3,5,6,7,8,10,11,12,\cdots$，觀察這個數列，發現完全平方數 $1^2,2^2,3^2,\cdots$ 都不在數列中，而其他數都在。
因此猜測：A爲非完全平方數的正整數所組成。
證明猜測的結果是對的：

1° $\left((n+1)+\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right)-\left(n+\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right)=1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>1$

$$\therefore\ a_{n+1}=\left[(n+1)+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]\ge\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}+1\right]=a_n+1$$

即 $a_{n+1}>a_n$，

所以$\{a_n\}$是嚴格遞增函數。

2° 設$m>1$ 爲正整數，且$m$與任一$a_n$都不相等，則必有一個正整數$n$滿足

$$a_n < m < a_{n+1}$$

$$\|\qquad\qquad\|$$

$$\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \qquad \left[(n+1)+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]$$

$\therefore\ n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m$ 且 $m+1\le(n+1)+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sqrt{n}<m-n-\frac{1}{2}\le\sqrt{n+1}$

$$n<(m-n)^2-(m-n)+\frac{1}{4}\le n+1$$

$\therefore\ -\frac{1}{4}<(m-n)^2-m\le\frac{3}{4}$

$\Rightarrow\ (m-n)^2-m=0$，即 $m=(m-n)^2$爲完全平方數。

3° 因爲 $k-1\le\sqrt{k^2-k}<k-\frac{1}{2}$，$\forall$正整數$k$

$$k^2-\frac{1}{2}\le(k^2-k)+\sqrt{k^2-k}+\frac{1}{2}<k^2$$

因此 $a_{k^2-k}=k^2-1$。

另一方面 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{k^2-k+1}\le k$，

所以 $k^2+1<k^2-k+1+\sqrt{k^2-k+1}+\frac{1}{2}\le k^2+\frac{3}{2}$，

因此 $a_{k^2-k+1}=k^2+1$，

所以 $k^2\notin A$。

## 習題

1. 若 $m^2 \le k < (m+1)^2 \Rightarrow [\sqrt{k}] = m$

$\therefore\ [\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = [\sqrt{3}] = 1$

$[\sqrt{4}] = [\sqrt{5}] = [\sqrt{6}] = [\sqrt{7}] = [\sqrt{8}] = 3$

$\vdots$

$[\sqrt{m^2}] = [\sqrt{m^2+1}] = \cdots = [\sqrt{(m+1)^2-1}] = m$

原式

$= ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \cdots + [\sqrt{8}]) + \cdots + ([\sqrt{(n-1)^2}] +$

$[\sqrt{(n-1)^2+1}] + \cdots + [\sqrt{n^2-1}])$

$= 1\times 3 + 2\times 5 + 3\times 9 + \cdots + (n-1)(2n-1)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1)$

$= 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$

$= \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}$

2. 設 $\alpha = \sqrt{29} + \sqrt{21}$，$\beta = \sqrt{29} - \sqrt{21}$，則 $\alpha^2 = 50 + 2\sqrt{609}$，$\beta^2 = 50 - 2\sqrt{609}$，

設 $s = \alpha^2$，$t = \beta^2$，則 $s + t = 100$，$st = 64$，因此 $s$、$t$ 是 $x^2 - 100x + 64$ 的兩個根。

設 $A_0 = s^0 + t^0 = 2$，

$A_1 = s^1 + t^1 = 100$，

$A_2 = s^2 + t^2 = (s+t)^2 - 2st = 100A_1 - 64A_0$，即 $A_2 - 100A_1 + 64A_0 = 0$，

$A_3 = s^3 + t^3 = (s+t)(s^2+t^2) - st(s+t) = 100A_2 - 64A_1$，即

$A_3-100A_2+64A_1=0$，

$\vdots$

$A_{44}=s^{44}+t^{44}\Rightarrow A_{44}-100A_{43}+64A_{42}=0$，

因此

$$A_{44}\equiv 36A_{42}\equiv(36)^2A_{40}\equiv\cdots\equiv(36)^{22}A_0=2\times(36)^{22}=2\times 6^{44}\pmod{100}$$

$\because\ 6^4\equiv -4\pmod{100}$

$\therefore\ A_{44}\equiv 2\times(-4)^{11}=-2\times 4^{11}\equiv(-2)\times(-4)\times(24)=192\equiv 92\pmod{100}$

所以 $\alpha^{88}+\beta^{88}$ 的末二位數字是 92，

又因 $0<\underbrace{\sqrt{29}-\sqrt{21}}_{=\frac{8}{\sqrt{29}+\sqrt{21}}}<1$

$\therefore\ 0<(\sqrt{29}-\sqrt{21})^{88}<1$，即 $[(\sqrt{29}+\sqrt{21})^{88}]=A_{44}-1$

$\therefore$ 末二位數字是 91

3. 解一：

顯然 $[x]>0$

$$\begin{cases}4[x]^2-40[x]+51\le 0 & ① \quad (\because x\ge[x]) \\ 4([x]+1)^2-40[x]+51>0 & ② \quad (\because x\lneq[x]+1)\end{cases}$$

①得 $(2[x]-3)(2[x]-17)\le 0$，得 $\frac{3}{2}\le[x]\le\frac{17}{2}$，

②得 $(2[x]-5)(2[x]-11)>0$，得 $[x]<\frac{5}{2}$ 或 $[x]>\frac{11}{2}$，

因此 $\frac{3}{2}\le[x]<\frac{5}{2}$ 或 $\frac{11}{2}<[x]\le\frac{17}{2}$，

$\Rightarrow[x]=2$、6、7、8

① $[x]=2\Rightarrow 4x^2-29=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{29}}{2}$

② $[x]=6\Rightarrow 4x^2-189=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{189}}{2}$

③ $[x]=7\Rightarrow 4x^2-229=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{229}}{2}$

④ $[x]=8\Rightarrow 4x^2-269=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{269}}{2}$

解 2：

顯然 $[x]>0$，$4x^2=40[x]-51$ 爲奇數。設 $4x^2=2k+1 \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2}$

$$\Rightarrow 40\left[\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\right]=2k+1+51$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\right]=\frac{k+26}{20}$$

$\therefore\ k\equiv 14 \pmod{20}$ —— ①

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2}\geq\dfrac{k+26}{20} & (\because x\geq\sqrt{x}) \\ \dfrac{\sqrt{2k+1}}{2}<\dfrac{k+26}{20}+1 & (\because x<\sqrt{x}+1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}k^2-148k+576\leq 0 \\ k^2-108k+2016>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(k-74)^2\leq 70^2 \\ (k-54)^2>30^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4\leq k\leq 144 \\ k<24 \text{或} k>84\end{cases}$$

$\Rightarrow 4\leq k<24$ 或 $84<k\leq 144$ —— ②

由①，②

$k=14$、$96$、$114$、$134$

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{189}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{229}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{269}}{2}$

4. 設 $x=[x]+\{x\}$，則原式爲 $[x]\{x\}<[x]+\{x\}-1$，即 $([x]-1)(\{x\}-1)<0$。
因此，$[x]>1$，解得 $x\geq 2$。

5.

(a) $0\leq\{x\}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2[x]=[2x]$

$\dfrac{1}{2}\leq\{x\}<1\Rightarrow [2x]=2[x]+1$

(b) $x$ 是整數 $\Rightarrow [x]+[-x]=x-x=0$

$x$ 不是整數，設 $x=n+\theta$，$0<\theta<1$，$n$ 整數，則 $[x]=n$，

$[-x]=-n-1\Rightarrow [x]+[-x]=-1$

6. $x$ 是整數，則 $-[-x]=-(-x)=x$

$x$不是整數，設 $x=n+\theta$，$0<\theta<1$，$n$整數，$\Rightarrow -x=-n-\theta$，$[-x]=-n-1$，

$-[-x]=n+1$

$\therefore\ -[-x]>x$

7.

(a) 充分證明

$$\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|\le\frac{1}{2}$$

$$x-\frac{1}{2}<\left[x+\frac{1}{2}\right]\le x+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\le\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|\le\frac{1}{2}$$

(b) 若有兩個整數同樣最接近$x$，則可知$x=n+\dfrac{1}{2}$，$n$是整數

$\Rightarrow x+\dfrac{1}{2}=n+1$，$\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=n+1$

8. 設 $x=n+\theta$，$0\le\theta<1$，代入得 $[2\theta]+[4\theta]+[8\theta]+[16\theta]+[32\theta]=12345-63n$，

$[\theta]+$

因 $0\le\theta<1$，

$\therefore\ 0\le n\theta<n$

$\therefore\ 0\le[n\theta]\le n-1$

所以 $0\le 12345-63n\le 57$

$$\Rightarrow\frac{12288}{63}\le n\le\frac{12345}{63}$$

$\therefore$ 無此整數$n$