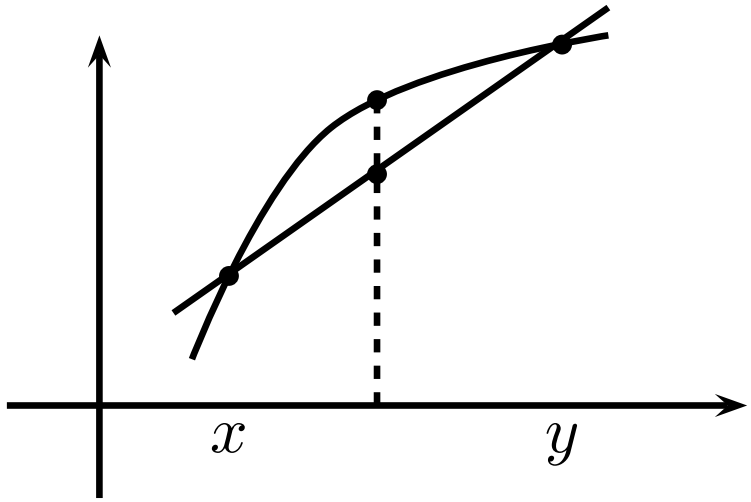
算術平均數 $\geq$ 幾何平均數

$x_1,\ x_2, \cdots, x_n > 0$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

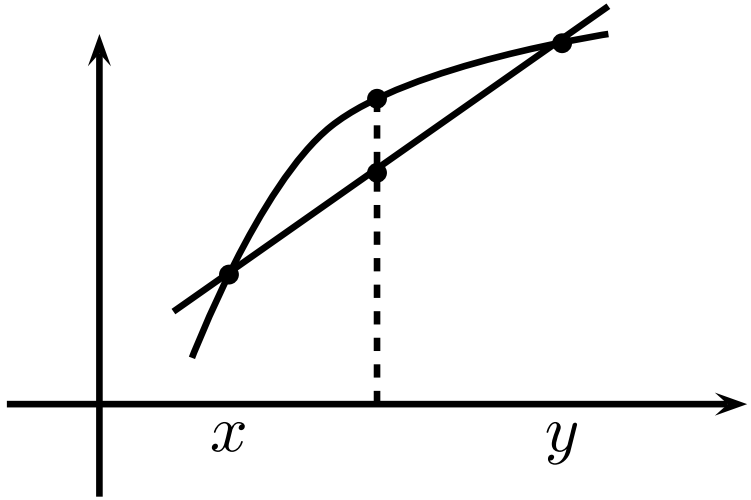
凹函數



對所有 $0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

凹函數



對所有 $0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

例 (1) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) $f(x) = \log x$ 對數

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \quad \geq \quad \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right]$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right] \\
\log\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right] \\
\log\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right] \\
\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} &\geq e^{\frac{1}{n}[\log x_1+\cdots+\log x_n]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right] \\
\log\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right] \\
\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} &\geq e^{\frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right]} \\
&= \left[e^{\log x_1}e^{\log x_2}\cdots e^{\log x_n}\right]^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right] \\
\log\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right] \\
\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} &\geq e^{\frac{1}{n}\left[\log x_1+\cdots+\log x_n\right]} \\
&= \left[e^{\log x_1}e^{\log x_2}\cdots e^{\log x_n}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(x_1\cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 且 $x_1, \cdots, x_n$ 之分佈較 $y_1 \cdots y_n$ 平均 (需嚴格定義), 則

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n)$$

若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 且 $x_1, \cdots, x_n$ 之分佈較 $y_1 \cdots y_n$ 平均 (需嚴格定義), 則

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n)$$

$x_1 = \cdots = x_n$ 爲最平均.

$x_1, \cdots, x_n;\ y_1, \cdots, y_n$

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ 爲 $x_1, \cdots, x_n$ 的重組

$y_{(1)} \le y_{(2)} \le \cdots \le y_{(n)}$ 爲 $y_1, \cdots, y_n$ 的重組

$(x_1, \cdots, x_n) \prec (y_1, \cdots, y_n)$:

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 且

$$\begin{aligned}
&x_{(1)} \ge y_{(1)}, \\
&x_{(1)} + x_{(2)} \ge y_{(1)} + y_{(2)}, \\
&x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(3)} \ge y_{(1)} + y_{(2)} + y_{(3)}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

若$(x_1, \cdots, x_n) \prec (y_1, \cdots, y_n)$, 則對所有凹函數 f,

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n)$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 爲一鈍角三角形的三個角度, 則

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$$

因此 $1 + \sqrt{2} \geq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 > 0$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 爲一鈍角三角形的三個角度, 則

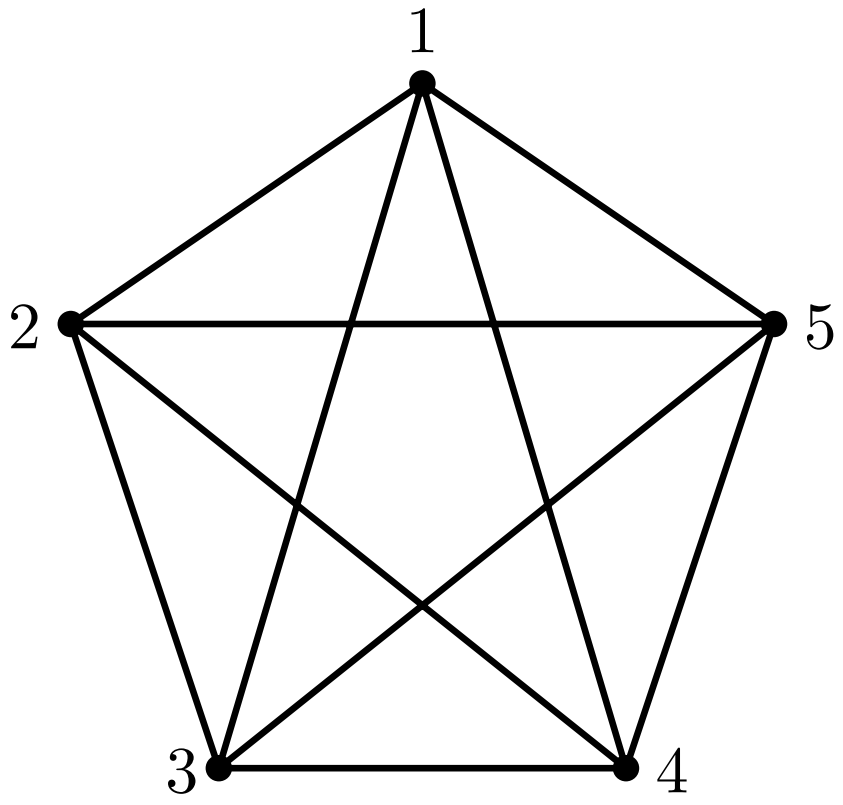
$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0)$$

因此 $1 + \sqrt{2} \geq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 > 0$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 爲一銳角三角形的三個角度, 則

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

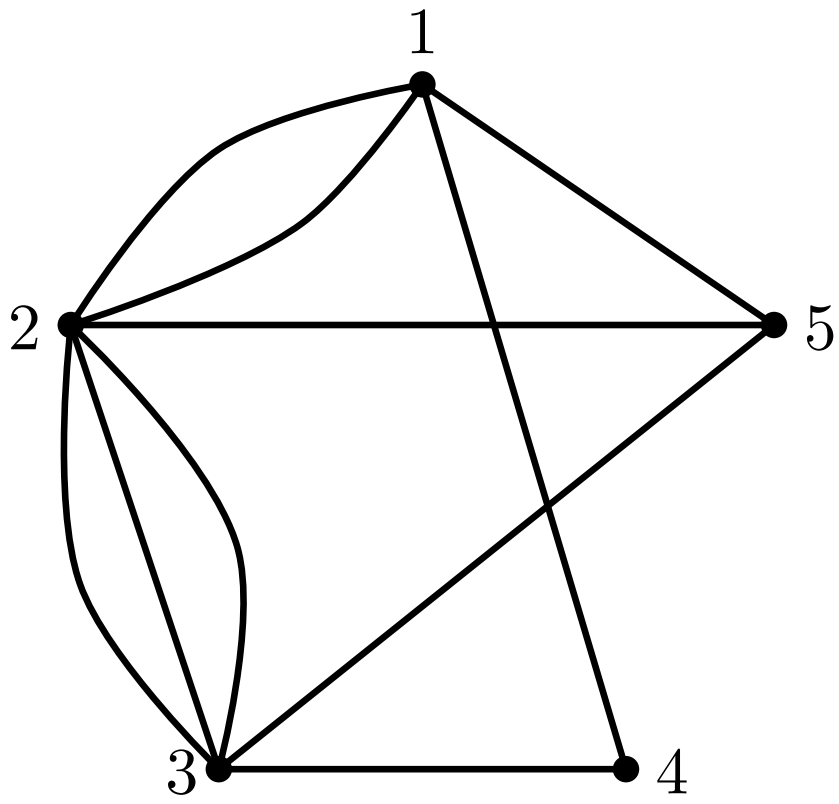
因此 $\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 > 2$



5 點

10 線

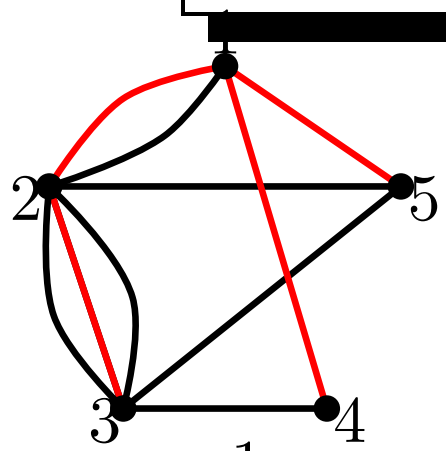
容許兩點間有超過一條以上的線

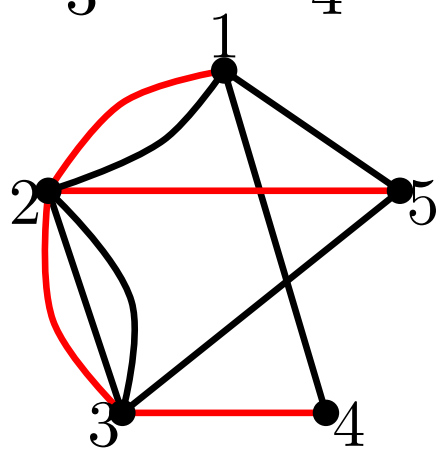


5 點

10 線

生成樹 (Spanning tree)





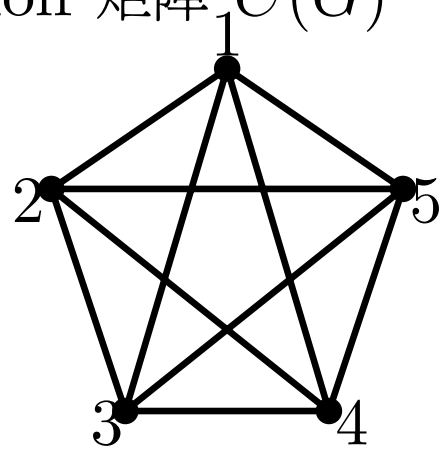
(i) 連通

(ii) 沒有 cycle

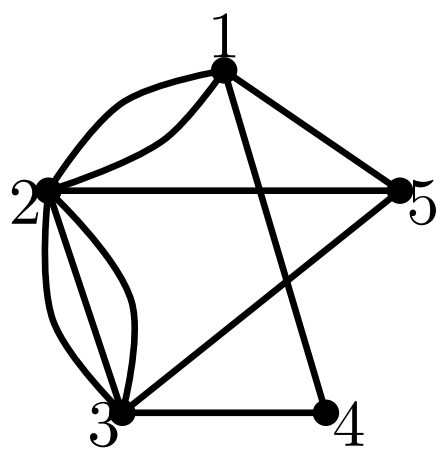
(iii) 通過所有點

問題: 給定點數及線數, 找一個有最多生成樹的圖。

Kirchhoff 矩陣 $C(G)$



$$C(G) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



$$C(G) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

C(G) 爲對稱方陣, 且所有列和$= 0$

G 中生成樹的總數等於去掉 $C(G)$ 的第一行及第一列所得方陣的行列式值。

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 125$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 105$$

行列式値

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

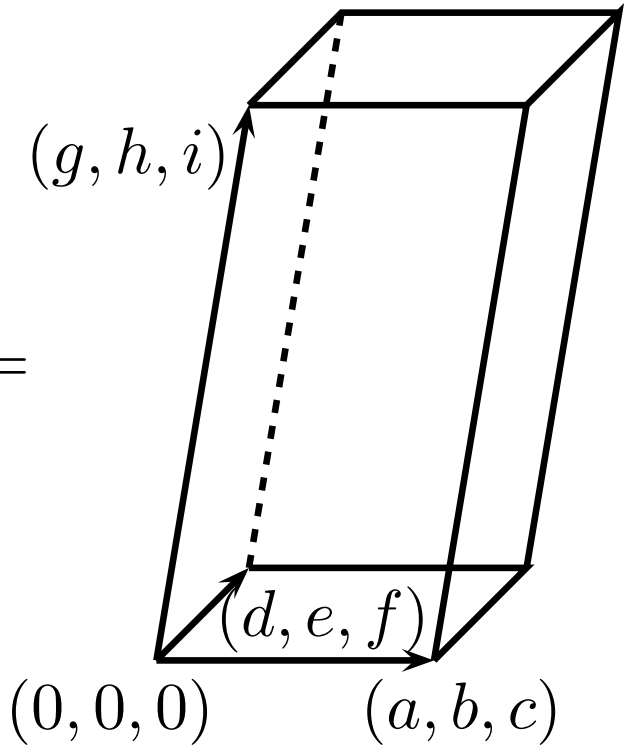
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}
$$

$$\left|\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right| =$$



之體積

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{轉置} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

定理: 給定 V 點。若任兩點間有 a 條線, 則此圖在所有有 V 個點及 $\frac{V(V-1)}{2} \cdot a$ 條線的圖形中有最多的生成樹。

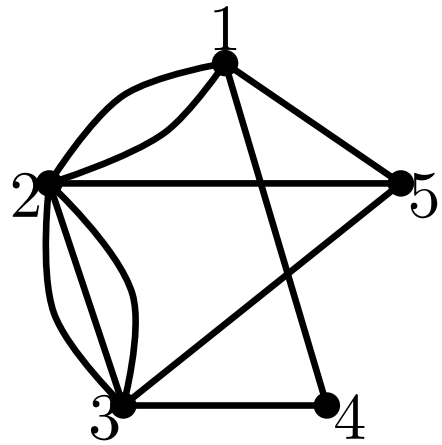
若 A 爲 $V \times V$ 對稱方陣, 且所有列和 $= 0$。去掉 A 的第一行及第一列。令所得子矩陣爲 $M(A)$。

定義 $\Phi(A) = |M(A)|^{\frac{1}{V-1}}$, 則 $A \to \Phi(A)$ 爲凹函數。

對所有 $0 < \lambda < 1$,

$$\Phi(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2) \geq \lambda\Phi(A_1) + (1-\lambda)\Phi(A_2)$$

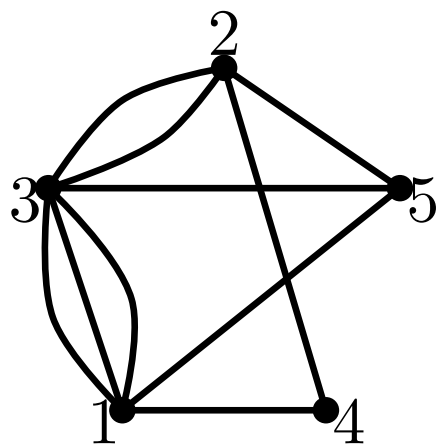
G :



$$C(G) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\pi : 1 \longrightarrow 2,\ 2 \longrightarrow 3,\ 3 \longrightarrow 1,$$
$$4 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 5$$

πG :



$$C(\pi G) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(C(G)) = \Phi(C(\pi G))$$

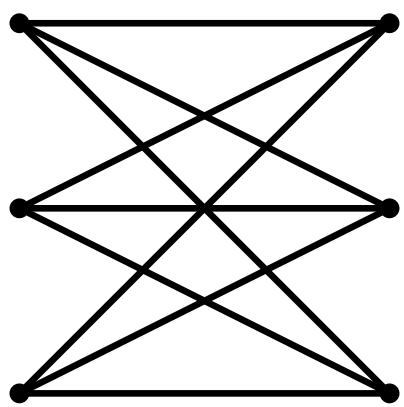
$$\Phi\left[\frac{1}{5!}\sum_{\pi} C(\pi G)\right] \geq \frac{1}{5!}\sum_{\pi}\Phi(C(\pi G)) = \Phi(C(G))$$

$\uparrow$

所有 $\{1,\cdots,5\}$ 的排列

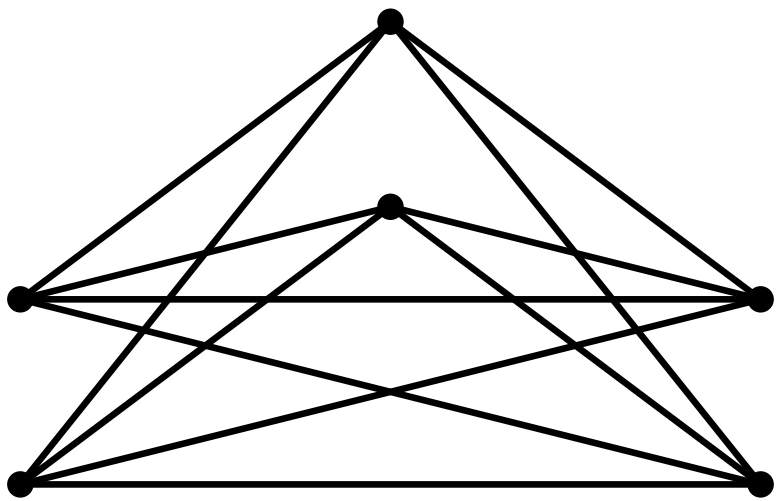
$\frac{1}{5!}\sum_{\pi} C(\pi G)$ 的所有對角線元素相等; 所有非對角線元素也相等。

假設總共有 $2n$ 個點。將所有 $2n$ 個點分成兩組, 每組 n 個點。在同一組的每兩點間放置 a 條線, 而在不同組的每兩點間放置 $a+1$ 條線, 則此圖在所有與它有相同點數, 相同線數的圖形中有最多的生成樹。



$n = 3$

$a = 0$



統計

數據 $\left\langle \begin{array}{l} \text{收集} \\ \text{分析} \end{array} \right.$

數據收集: 抽樣, 實驗。

實驗設計

R. A. Fisher

隨機化 (randomization)

區集化 (blocking)

實驗設計

R. A. Fisher

隨機化 (randomization)

區集化 (blocking)

4	5	6	7	1	2	3
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

平衡不完全區集設計

實驗設計

R. A. Fisher

隨機化 (randomization)

區集化 (blocking)

4	5	6	7	1	2	3
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

平衡不完全區集設計

信賴區域

秤重設計

天平

n 個物件, 其重量分別爲 $w_1, \cdots, w_n$.

每次秤重的觀察值爲 (放置於右邊所有物件的總重量)−(放置於左邊所有物件的總重量)+隨機誤差.

$n = 4$, 共秤 4 次

	左	右
第一次:		$1, 2, 3, 4$
第二次:	$3, 4$	$1, 2$
第三次:	$2, 4$	$1, 3$
第四次:	$2, 3$	$1, 4$

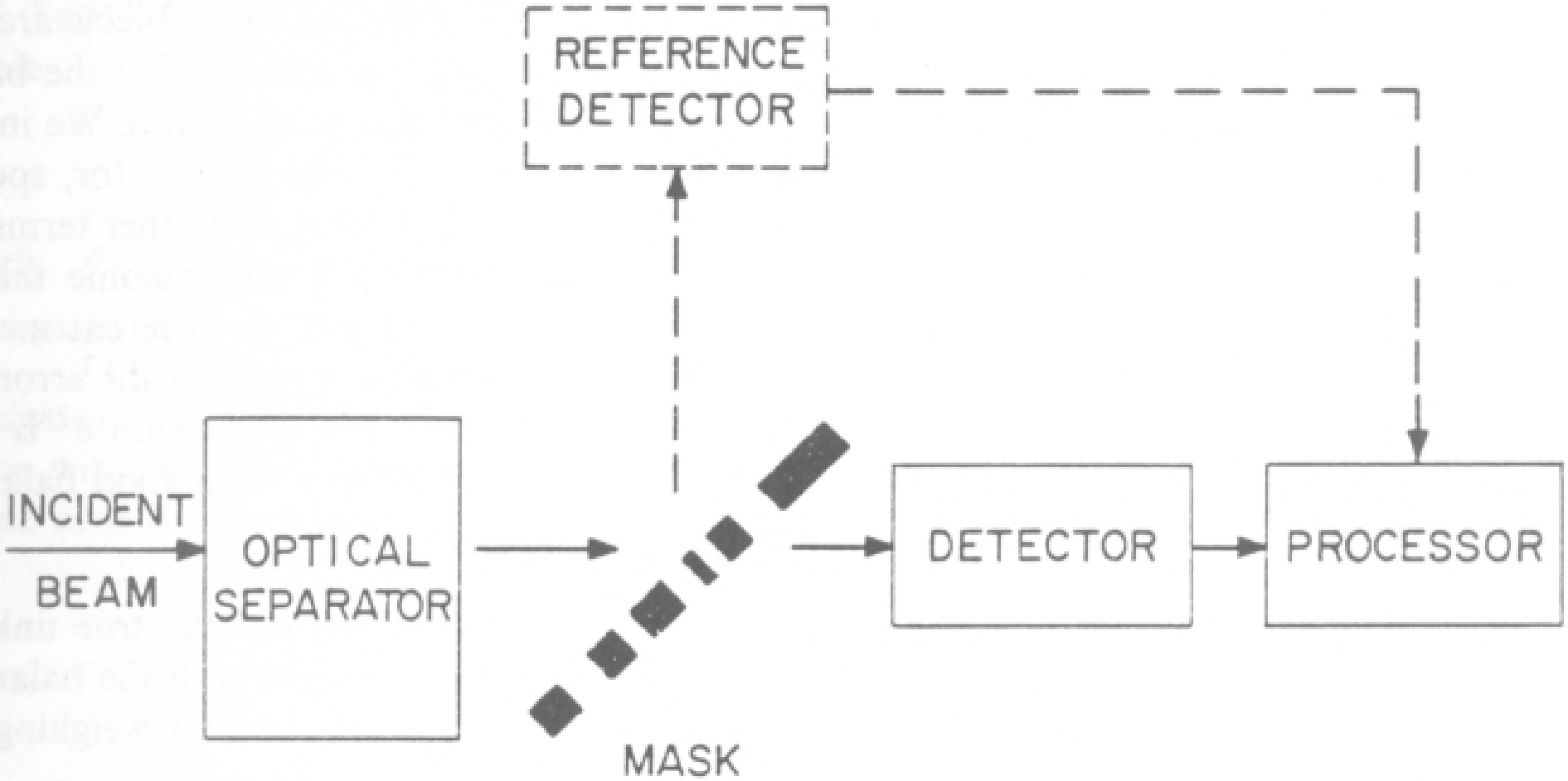
$$
\begin{aligned}
y_1 &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \\
y_2 &= w_1 + w_2 - w_3 - w_4 \\
y_3 &= w_1 + w_3 - w_2 - w_4 \\
y_4 &= w_1 + w_4 - w_2 - w_3
\end{aligned}
$$

w_1之估計爲 $\frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

w_2之估計爲 $\frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)$

w_3之估計爲 $\frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$

w_4之估計爲 $\frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$


REFERENCE
DETECTOR
INCIDENT
BEAM
OPTICAL
SEPARATOR
MASK
DETECTOR
PROCESSOR

假設有 n 個物件, 共秤 N 次 $(N \geq n)$. 各秤重設計可用一個 $N \times n$, 元素爲 $+1$ 或 -1 的矩陣來表示。在上述例子中,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

問題: 在所有元素爲 $+1$ 或 -1 的 $N \times n$ 矩陣 X 中, 找一個使 $|X^T X|$ 達到最大。

問題: 在所有元素爲 $+1$ 或 -1 的 $N \times n$ 矩陣 X 中, 找一個使 $|X^T X|$ 達到最大。

若$X^T X = \begin{bmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{bmatrix}$, 則 X 爲一解.

定義: 若 X 爲一元素爲 $+1$ 或 -1 的 $n \times n$ 方陣, 且

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

則稱 X 爲一 Hadamard 矩陣.

Hadamard 矩陣存在的必要條件爲 $n = 2$ 或 n 爲 4 的倍數.

Hadamard 猜測: 若 n 爲 4 的倍數, 則必存在一 $n \times n$ Hadamard 矩陣.

$Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ 3 + 5 = 1,\ 4 \cdot 3 = 5,\ \cdots$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	6	5	4	3	2	1
1	1	0	6	5	4	3	2
2	2	1	0	6	5	4	3
3	3	2	1	0	6	5	4
4	4	3	2	1	0	6	5
5	5	4	3	2	1	0	6
6	6	5	4	3	2	1	0

表列元素爲 $i - j$

若表列元素可寫成 x^2, 以 1 替換; 否則換成 -1.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

對角線上元素換成 1:

$$
\begin{matrix}
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{matrix}
$$

加一列 -1:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

正交表 orthogonal array

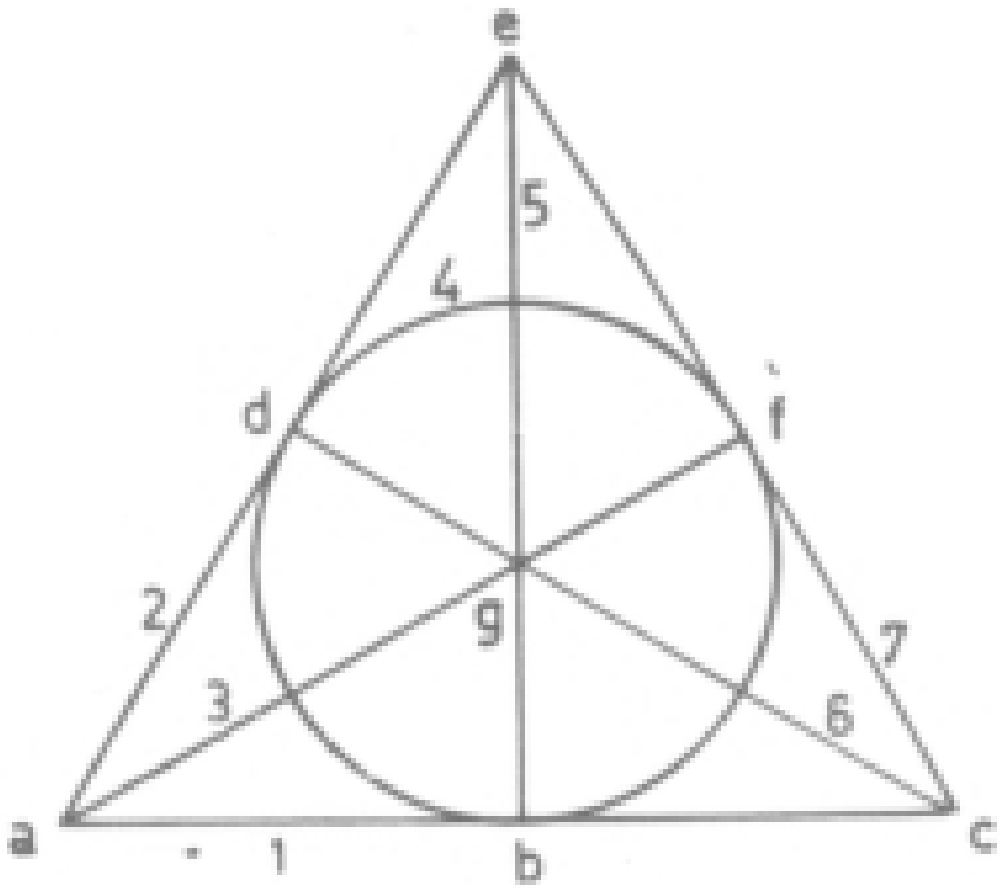
再加一行 1, 則得一 Hadamard 矩陣

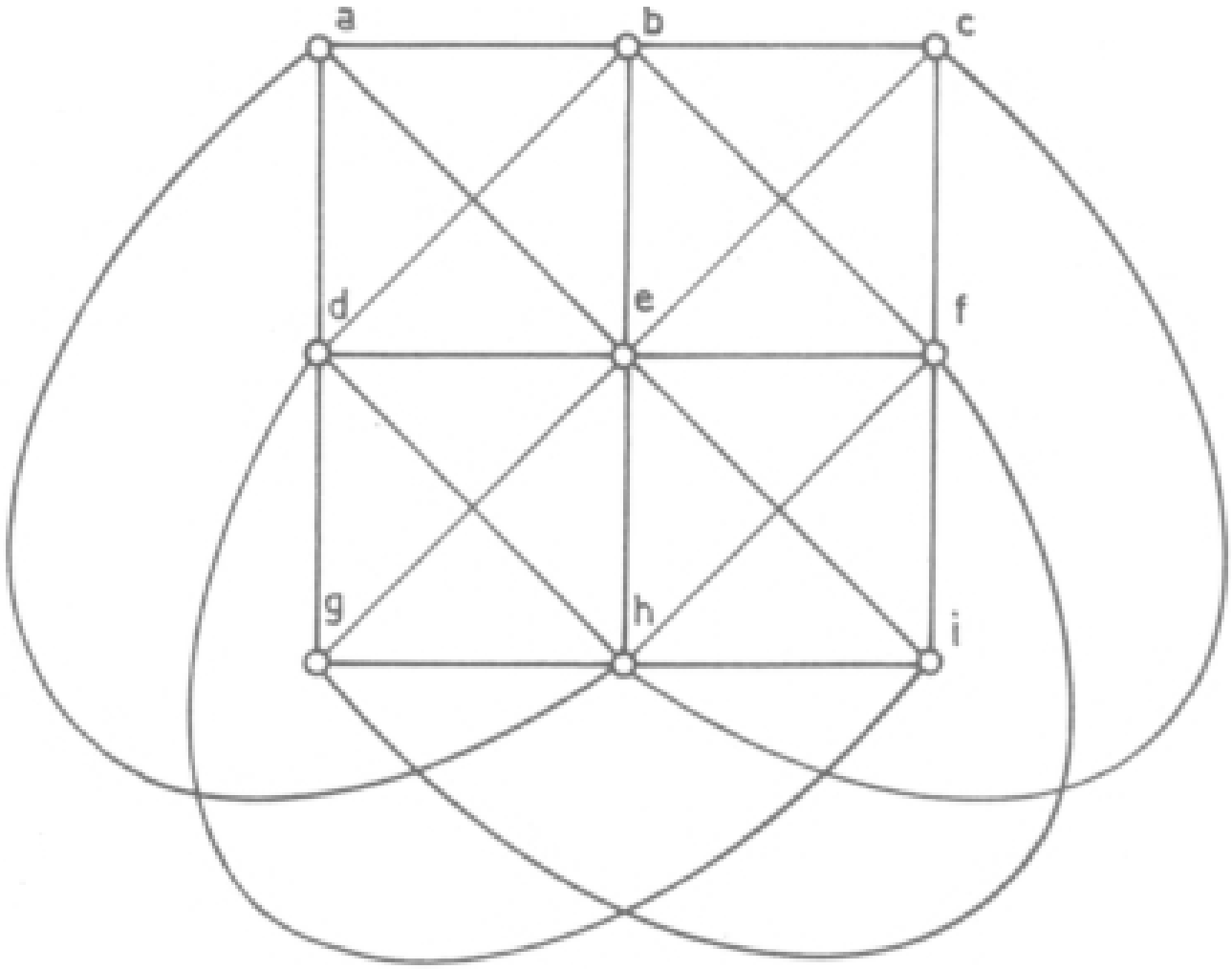
$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1

任三列含有 $+1, -1$ 的 8 個組合各 2 次 (正交表)

任兩行的距離 (相異元素的個數) 爲 4 或 8
error-correcting code


e
5
4
d
f
2
g
7
3
6
a
1
b
c


a
b
c
d
e
f
g
h
i