

醫檢結果顯示是否罹病到嫌犯有罪與否之判定

— 淺談統計在“選擇”上所扮演的角色

鄒宗山

中央大學統計研究所

民國 100 年 11 月 20 日

統計學的範疇涵蓋甚廣, 不同的領域各有其背景, 假設, 工具以及所欲回答與解決的問題。

研究者常利用統計學來對研究的對象 (參數) 做出判斷。例如: 研發的新藥的療效為何? 愛滋病患的平均剩餘壽命等等。欲回答這些問題, 研究者往往會先收集資料, 再依據資料做判斷。但研究者往往也有主觀的認定。

資料(Data): 經由實驗或測量所得的觀察值。如: 血壓, 身高, 老鼠對化學物質的反應 (如: 胎兒畸形與否) 等等。資料是客觀的, 不受主觀的影響。

相對於客觀的資料, 每個人對某一事件亦有主觀的看法或意見。如, 對同一食物的喜好不同 (如, 臭豆腐, 皮蛋), 對候選人的好惡程度不同。這種主觀的看法往往是根基於過往經驗的累積。

統計學重要的工作之一便是探索資料所傳遞的研究者有興趣的訊息, 有時候(不必然) 也加入主觀的認定, 進而對研究的對象做判斷。

[例一]: 假設王先生做了某種醫學檢驗以檢查是否罹患某種疾病, 而檢驗結果為陽性。此例中, 我們可能對下面的三個問題有興趣:

- 1 陽性的檢驗結果是否表示王先生有此疾病?
- 2 王太太是否認為王先生真的有此疾病?
- 3 根據檢驗結果, 醫生是否應該給予王先生治療?

[例二]: 王先生因謀殺罪被起訴, 由檢察官及王先生的律師向法官及陪審團各舉罪證及反證。陪審團成員根據檢察官與王先生的律師所列舉的相關證據來判斷王先生是否有罪。

例二中,

- 1 檢察官與王先生的律師所列舉的相關證據是否指向王先生有罪?
- 2 陪審團成員是否認為王先生有罪?
- 3 法官是否判決王先生有罪?

以上三個問題的回答分屬於統計三個不同的領域。

答案也不一定相同。

假設例一中醫學檢驗的試劑有以下的特徵:

表一

	陽性	陰性
D	0.95	0.05
\bar{D}	0.02	0.98

其中,0.95為如果王先生真有此疾病,而檢驗結果為陽性的機會,(敏感度, sensitivity)

0.05為如果王先生真有此疾病,但檢驗結果為陰性的機會,

0.02為如果王先生沒病,但檢驗結果為陽性的機會,

0.98為如果王先生沒病,而檢驗結果為陰性的機會。(特異性, specificity)

陽性的檢驗結果(資料) 是否顯示王先生有病呢? 根據概似定律(Law of likelihood, Hacking,1965), 如果在真正有病的情況下, 得到陽性結果的機率大於沒病情況下, 得到陽性結果的機率, 則陽性結果, 即, 資料支持王先生有病的結論。(注意: 此結論有錯誤的機會)

我們用 $P(\bullet|\bullet)$ 來描述〈表一〉的四個機率值

	陽性	陰性
D	$P(+ D)=0.95$	$P(- D)=0.05$
\bar{D}	$P(+ \bar{D})=0.02$	$P(- \bar{D})=0.98$

依據表一, 如果真正有病, 而檢驗結果為陽性的可能性 (0.95) 為
如果沒病而檢驗結果為陰性的可能性 (0.02) 的 47.5 倍, 亦即

$$P(+|D)/P(+|\bar{D})=0.95/0.02=47.5$$

所以陽性的檢驗結果強烈支持王先生有病的假設。

而根據陽性的檢驗結果,王先生有病的機會多大呢,
即, $P(+|D) = ?$ 根據**Bayes** 定理

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+|D)P(D) + P(+|\bar{D})P(\bar{D})}$$

明顯的,依據表一,此機率無法被計算,因為無“盛行率”,即 $P(D)$ 。此為總人口中有此疾病的百分比。注意, $P(D)$ 與資料 (王先生的檢驗結果) 無關,此機率統計上稱之為“事前機率”,即資料得到前便有的訊息。

某疾病的盛行率會因時間的不同而改變。譬如說, 考慮 D =非典型肺炎 (SAS)。數年前 SAS 盛行時, $P(D)$ 遠高於現在 ($P(D)=0$)。同樣的, A 型流感在盛行期與非盛行期之盛行率截然不同。所以, 根據同樣的檢驗結果, 因 $P(D)$ 不同, 得到的 $P(D|+)$ 大小也不同。因此, 可能導致不同的結論。

顯然 $P(D|+)$ 的大小取決於 $P(D)$ 的大小。依表一的數據計算可得, 如果盛行率大於 0.02, 即 $P(D) > 0.02$, 則 $P(D|+) > 0.5$ 。換言之, 如果平均而言, 當時 100 個人之中便有 2 個患者, 則根據檢驗結果, 王太太認為王先生得病的機率大於不得病的機率。

而在例二中, 在王先生無辜的假設下, 王先生的衣服有血跡反應, 正好路過命案現場的機率如果大於王先生有罪的情況下, 王先生的衣服有血跡反應, 正好路過命案現場的機率, 則證據(資料) 支持王先生是無辜的。

對王先生的一位好友張先生, 知曉王先生是一位樂於助人的佛教徒, 此人的主觀判斷如何? 如果此友知友甚深, 深交30年, 則此人的 $P(\text{有罪})$ (與證據無關) 極小。因此, 看到證據後, 張先生的

$$P(\text{有罪}|\text{證據}) = \frac{P(\text{證據}|\text{有罪})P(\text{有罪})}{P(\text{證據}|\text{有罪})P(\text{有罪}) + P(\text{證據}|\text{無辜})P(\text{無辜})}$$

可能還是極小, 張先生依然認為王先生無辜。

對王先生的另一位, 只認識一年的朋友, 雖然知道王先生是一位佛教徒, 也樂於助人, 此人的主觀判斷如何?

此人的主觀 $P(\text{有罪})$ 雖小, 但不一定小到能夠讓 $P(\text{有罪}|\text{證據})$ 夠小(如, 小於0.5)。因此, 看到相同的證據後, 此人的認定(知人知面不知心) 可能與張先生不同。

至於根據檢查結果醫生是否應該給予王先生治療呢!假設此疾病只是感冒,則治療與否的後果並無嚴重的後果。所以,是否治療並不太重要。換句話說,醫生雖然診斷王先生罹病,但其可能依無病的方式處置。

反之, 如果考慮的疾病是急性腦炎, 如果不治療則可能有生命的危險! 因此, 醫生雖然只是有些許的懷疑, 可能還是採取保守的處置(當作罹病來處理): 立即投藥, 以避免無法挽回的後果。

明顯的, 要回答是否應該給予王先生治療的問題, 尚須根據治療與否的後果如何來做決定。根據檢查結果醫生可能還會參考藥品成本, 病人能否負擔, 治療與否的後果等做處置。

以統計的語言來說, 假設 $l(\bullet, \bullet)$ 為損失函數 (loss function), 而下表為治療與不治療的可能損失 (後果)

	治療	不治療
D	$l(T, D)$	$l(\bar{T}, D)$
\bar{D}	$l(T, \bar{D})$	$l(\bar{T}, \bar{D})$

其中 T 代表治療 (Treatment) 而 \bar{T} 代表不治療。根據上表及檢驗結果, 給予治療的期望後果(危險函數, risk function) 為

$$R(T) = l(T, D)P(D|+) + l(T, \bar{D})P(\bar{D}|+)$$

而不治療的期望後果為

$$R(\bar{T}) = l(\bar{T}, D)P(D|+) + l(\bar{T}, \bar{D})P(\bar{D}|+)$$

如果 $R(\bar{T}) > R(T)$, 則醫生當給予王先生治療。反之如果 $R(T) > R(\bar{T})$, 則可以不給予治療。因為 $P(D|+)$ 的決定, 除了檢驗結果外, 尚須知道盛行率 $P(D)$ 。明顯的, $R(T)$ 的決定除了以上二個因素外, 還需知道損失函數。

根據以上三種分析的結果, 可以知道第一個問題的回答, 只須要檢驗的結果(資料) 即可。而要回答第二個問題, 除了檢驗的結果之外, 還需要考慮盛行率。如果盛行率低於0.02, 則雖然檢驗結果為陽性, $P(D|+)$ 仍然小於0.5。至於第三個問題的回答, 則除了檢驗結果及盛行率外, 還要考慮治療與不治療的後果, 才能決定是否給予王先生治療。

在例二中,如陪審員被告知嫌犯有前科,則其 $P(\text{有罪})$ 大於無前科嫌犯的 $P(\text{有罪})$ 。因此,如嫌犯為累犯,則陪審員認定嫌犯有罪的機會大,即, $P(\text{有罪}|\text{證據})$ 大。

至於法官的判定呢? 有罪與無罪判定的後果(如法官自身的前途,與嫌犯的關係等)可能皆會影響法官的判決。

這裡所談到的三個問題, 可以依序用下列三種分析方法來回答:

1. 概似定律 (Law of Likelihood)
2. 貝氏分析 (Bayesian Analysis)
3. 決策理論 (Decision Theory)

貝氏定理與概似定律間的關係

根據貝氏定理, $P(\text{假設一}|\text{資料})$ 與 $P(\text{假設二}|\text{資料})$ 的比值等於

$$P(\text{資料}|\text{假設一})P(\text{假設一})$$

除以

$$P(\text{資料}|\text{假設二})P(\text{假設二})$$

也就是

$$\frac{P(\text{假設一}|\text{資料})}{P(\text{假設二}|\text{資料})} = \frac{P(\text{資料}|\text{假設一})P(\text{假設一})}{P(\text{資料}|\text{假設二})P(\text{假設二})}$$

如,

$$\frac{P(\text{有罪}|\text{證據})}{P(\text{無罪}|\text{證據})} = \frac{P(\text{證據}|\text{有罪})P(\text{有罪})}{P(\text{證據}|\text{無罪})P(\text{無罪})}$$

其中“ $P(\text{有罪})$ ”與“ $P(\text{無罪})$ ”為“有罪”與“無罪”的先驗機率,即主觀的判斷。也就是說 $P(\text{有罪})$ 及 $P(\text{無罪})$ 為當沒有任何證據時,對“有罪”與“無罪”何者為真的可能性的主觀認定。

所以證據的影響是增加或減少 $P(\text{有罪})$ 及 $P(\text{無罪})$ 的相對機率。
在尚未有證據 (資料) 之前“有罪”與“無罪”間的選擇, 只是依據
事前 (資料收集前) 有關“有罪”與“無罪”的資訊 (前科等) 來決定
 $P(\text{有罪})/P(\text{無罪})$ 的大小。

而資料收集後 (事後, post) 的相對機率,

$$\frac{P(\text{有罪}|\text{證據})}{P(\text{無罪}|\text{證據})}$$

則是根據資料所提供的 evidence, 亦即概似比例

$$\frac{P(\text{證據}|\text{有罪})}{P(\text{證據}|\text{無罪})}$$

來調整。

雖然證據顯示

$$\frac{P(\text{證據}|\text{有罪})}{P(\text{證據}|\text{無罪})} > 1$$

但, 如果此比值不足以讓

$$\frac{P(\text{有罪}|\text{證據})}{P(\text{無罪}|\text{證據})} = \frac{P(\text{證據}|\text{有罪})P(\text{有罪})}{P(\text{證據}|\text{無罪})P(\text{無罪})} < 1$$

(因 $P(\text{有罪})/P(\text{無罪})$ 極小), 則一個貝氏分析的結果依然支持“無罪”的假設。

結語

一般而言, 利用概似定律, 貝氏分析與決策理論三種工具, 對同樣的資料所做的結論可能是不同的。

貝氏分析除了利用觀察資料外, 尚加入先前資訊。根據相同的觀察結果, 如每個人的先前資訊不同, 所做的貝氏分析結論可能完全不同。譬如說, 假設台灣南北二地的二位醫生從相同的病人身上看到了類似登革熱症狀, 但如果在南部有極高的登革熱盛行率, 則南部的醫生可能便會診斷為登革熱。而如果北部的醫生根據北部較低的或許是零的盛行率, 則可能不會判斷為登革熱。依據不同的地區的盛行率, 醫生可能會有不同的診斷。

而決策理論則還考慮治療的後果來做為結論的根據。治療與否的後果(loss)的嚴重性,是利用決策理論做統計分析所考慮的一部份。

而如果目的是推測參數的真正值(推論),而非個人對參數的主觀看法(貝氏分析),或考慮可能的損失函數後所選取的參數值(決策理論),則利用概似定律所做的結論較合適。